



# 大学物理现代技术实验——傅立叶光学

于洪飞 PB23020640<sup>†</sup>

<sup>†</sup> 中国科学技术大学 物理学院, 合肥 230026

**摘要** 本实验基于傅立叶光学理论, 搭建透镜成像与空间滤波系统, 研究空间频率成分对图像结构的影响。实验通过激光照明与光栅投影, 改变了傅立叶透镜后焦面上的频谱结构, 并对像平面实施不同的滤波操作, 得到空间频率变化对应的图像变化。实验中测量了透镜焦距与光栅常数, 验证了频谱结构的周期性, 并在仅保留部分频率分量时成功得到不同方向的条纹图像, 展示了傅立叶变换中的方向对偶特性, 并且顺利验证了无反变换透镜条件下的远场图像, 验证了夫琅和费衍射在空间传播中的傅立叶行为。

**关键词** 光学; 傅立叶变换; 傅立叶光学

## College Physics Experiment III – Fourier Optics

YU HongFei<sup>†</sup>

<sup>†</sup>School of Physical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026

**Abstract** This experiment, based on the theory of Fourier optics, constructs a lens imaging and spatial filtering system to study the influence of spatial frequency components on image structures. Using laser illumination and grating projection, we modulated the frequency spectrum at the back focal plane of a Fourier lens and applied various filtering operations to the image plane, thereby observing the corresponding changes in image structure induced by spatial frequency selection. The focal length of the lens and the grating constant were measured, and the periodicity of the frequency spectrum was verified. When only specific frequency components were retained, directional fringes were successfully observed, demonstrating the directional duality inherent in Fourier transforms. Furthermore, we successfully observed filtered images in the far field without using an inverse transform lens, thereby confirming the Fourier nature of Fraunhofer diffraction in free-space propagation.

**Keywords** Optics; Fourier Transform; Fourier Optics

## 引言

傅立叶光学的建立可以追溯到上世纪 30 年代——人们逐渐意识到, 成像系统作为光学中最常研究的物理系统, 与通信系统一样, 都是收集和传递信息。与后者不同的是, 光学成像系统中, 我们更关注空间特性 (例如光的振幅在空间上的分布), 而后者 (通信系统) 更关注时间特性。从物理的角度来看, 这两种差异可以被同一种数学工具统一起来——傅立叶分析。<sup>[1]</sup>

上述分析是基于光学与通信类比推导的, 实际上, 傅立叶光学实现的基础是“波动光场在空间传播的过程中, 其传播行为可以被表示为空间频率的叠加”<sup>[2]</sup>, 这与傅立叶变换的本质是相同的。

傅立叶分析常被用于分析线性成像系统。在傅立叶光学中, 我们认为物体是特定频率的正弦波的总和, 透镜等光学元件将物体分解为傅立叶级数 (E. Abbe, 1873)。<sup>[3-4]</sup> 对于一个傅立叶透镜而言, 前焦平面上图形的空间分布可以在后焦平面上完整的被

映为傅立叶变换后的频率分布, 由傅立叶变换的对偶性质, 我们可以将后焦平面的频率分布再通过一个傅立叶透镜变回原图像。由此, 我们还可以对频率分布做滤波处理, 从而影响最后成像的性质。

科学的来讲, 傅立叶光学是一门把光学成像、衍射、滤波等问题放在傅立叶空间研究的学科, 统一了光波的衍射、聚焦、成像等过程, 实现了光场的空间频谱分析, 是现代光学的理论核心。

本实验将通过研究物体在透镜变换后的像的性质, 理解空间频率、空间频谱和空间滤波等概念, 并通过对后焦平面的滤波, 了解不同频段频谱对图形的影响。

## 1 理论模型与实验方法<sup>[5-6]</sup>

### 1.1 傅立叶变换<sup>[7]</sup>

这里我们简单的回顾一下傅立叶变换 (Fourier Transform) 及其逆变换的定义:

**定义 1.1.** 对于一个多实变量复函数  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ , 我们定义其傅立叶变换为:

$$\mathcal{F}[f](\mathbf{u}) = \int f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^d \mathbf{x}.$$

其中  $\mathbf{x}, \mathbf{k}$  为  $d$  维实向量, 内积  $\cdot$  为平凡的欧几里德 (Euclidean) 内积. 对应的逆变换为:

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \mathcal{F}[f](\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^d \mathbf{k}.$$

为了在傅立叶光学中更加方便、对称的表示, 我们考虑空间频率  $\mathbf{u} = \frac{1}{(2\pi)^d} \mathbf{k}$ , 从而实现傅立叶变换的对称化 (令  $\tilde{f} = \mathcal{F}[f]$ ):

$$\tilde{f}(\mathbf{u}) = \int f(\mathbf{x}) e^{-i2\pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}} d^d \mathbf{x}, \quad (1)$$

$$f(\mathbf{x}) = \int \tilde{f}(\mathbf{u}) e^{i2\pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}} d^d \mathbf{u}. \quad (2)$$

此外傅立叶光学中还会涉及到卷积 (convolution) 操作, 我们还是回顾一下定义:

**定义 1.2.** 实空间两个函数  $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})$  的卷积  $f \star g$  定义为:

$$\begin{aligned} (f \star g)(\mathbf{x}) &= \int f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) d^d \mathbf{x}' \\ &= \int f(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d^d \mathbf{x}'. \end{aligned}$$

可以证明卷积是可交换的 (阿贝尔的, Abelian), 此外对于考虑傅立叶变换我们还有卷积定理:

**定理 1.1 (卷积定理).** 假设函数  $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})$  在傅立叶空间的函数分别为  $F(\mathbf{u}), G(\mathbf{u})$ , 则其卷积对应的傅立叶函数为两个函数分别对应的傅立叶函数的乘积:

$$\mathcal{F}[f \star g](\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) \cdot G(\mathbf{u}).$$

根据对称性, 傅立叶空间函数的卷积在实空间也可以表示为两个对应的实函数的乘积.

最后给出常见函数的傅立叶变换:

| 函数 $f(x, y)$                           | 傅里叶变换 $\mathcal{F}\{f(x, y)\}$                        |
|----------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $e^{-\pi(x^2+y^2)}$                    | $e^{-\pi(u^2+v^2)}$                                   |
| $\text{rect}(x) \text{rect}(y)$        | $\text{sinc}(u) \text{sinc}(v)$                       |
| $\delta(x, y)$                         | 1                                                     |
| $e^{j\pi(x+y)}$                        | $\delta(u - \frac{1}{2}, v - \frac{1}{2})$            |
| $\text{comb}(x) \text{comb}(y)$        | $\text{comb}(u) \text{comb}(v)$                       |
| $\text{circ}(r), r = \sqrt{x^2 + y^2}$ | $\frac{J_1(2\pi\rho)}{\rho}, \rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ |

表 1: 常见二维傅里叶变换对照表

其中  $\text{comb}$ ,  $\text{circ}$ ,  $\text{rect}$  分别为周期性 Dirac Delta 函数 (Dirac comb)、圆孔函数和矩孔函数,  $J_1$  为一阶贝塞尔函数.

## 1.2 光学系统<sup>[8]</sup>

傅立叶光学的光学基础源自惠更斯-菲涅尔原理 (Huygens-Fresnel principle, 简称惠更斯原理), 惠更斯原理指出: 波的传播过程可以视为波前的每一点发出次波, 这些次波互相干涉, 叠加形成新的波前. 我们考虑如下情景, 记  $z = 0$  出发出的波为  $f_0(x', y')$ , 则传播到  $z$  处的波可以写为:

$$f_z(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda} \int f_0(x', y') \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dx' dy'. \quad (3)$$

其中  $\mathbf{r}' = (x', y', 0)$ ,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ .

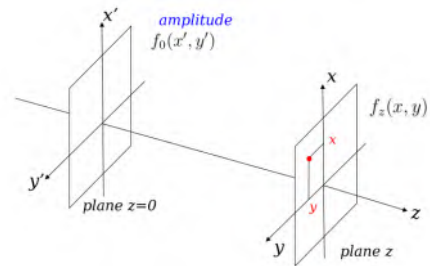


图 1: 图片来源<sup>[8]</sup> 1.2.1.

对于公式 3 我们可以做傍轴近似:

$$\begin{aligned} f_z(x, y) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int f_0(x', y') \exp\left(i\pi \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{\lambda z}\right) dx' dy'. \end{aligned}$$

实际上  $f_z(x, y)$  正是  $f_0(x, y)$  与  $D_z(x, y) = \frac{1}{i\lambda z} \exp\left(i\pi \frac{\rho^2}{\lambda z}\right)$  的卷积（乘相位因子  $e^{ikz}$ ），其中  $\rho = x^2 + y^2$ ：

$$f_z(x, y) = e^{ikz} f_0(x, y) \star D_z(x, y). \quad (4)$$

傍轴近似也称为菲涅耳衍射 (Fresnel diffraction).

### 1.3 远场

对于菲涅耳衍射公式 4 的进一步化简，我们可以先考虑最简单的情形， $z \rightarrow \infty$ ，此时菲涅耳衍射退化为夫琅和费衍射 (Fraunhofer diffraction)：

$$f_z = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \tilde{f}_0\left(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}\right). \quad (5)$$

其中  $\tilde{f}_0$  是  $f$  的傅立叶变换. 至此我们证明了光场在远场处的像为其原本函数的傅立叶变换.

### 1.4 透镜

另一种常见情况是会聚透镜对像的变换，假设有光场  $f_0(x, y)$  透过位于  $z = 0$  处的透镜，透射后的像变为：

$$f_{0+}(x, y) = f_0(x, y) \mathcal{L}_F(x, y). \quad (6)$$

其中  $\mathcal{L}_F(x, y) = \exp\left[-\frac{i\pi\rho^2}{\lambda F}\right]$ ， $\rho^2 = x^2 + y^2$  是焦距为  $F$  的透镜的变换函数. 再考虑菲涅耳衍射公式 4，令  $z = F$ ，由卷积定理我们可以将其写为：

$$f_F(x, y) = \frac{e^{ikF}}{i\lambda F} \exp\left(\frac{i\pi\rho^2}{\lambda F}\right) \mathcal{F}\left[f_{0+}(x', y') e^{\frac{i\pi\rho'^2}{\lambda F}}\right].$$

带入 6 最后推出：

$$f_F(x, y) = \frac{e^{ikF}}{i\lambda F} \exp\left(\frac{i\pi\rho^2}{\lambda F}\right) \tilde{f}_0\left(\frac{x}{\lambda F}, \frac{y}{\lambda F}\right) \quad (7)$$

即会聚透镜对原光场的作用也相当于对其进行了傅立叶变换.

## 2 实验仪器

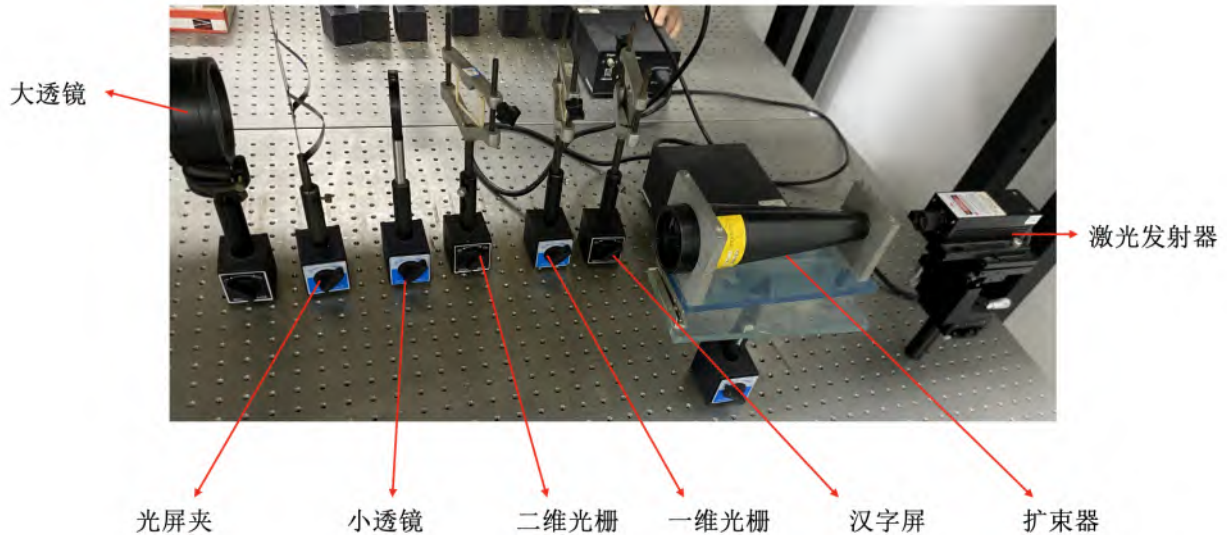


图 2: 实验仪器.

实验中用到的仪器如图所示，从右到左分别为：

1. 固体激光发射器：发射 671 nm 激光；
2. 扩束器：将激光发射器发射的激光扩束，得到空间范围更大一束平行激光；

3. 汉字屏：光束仅能从屏上形状为“光”的孔内出射；
4. 一维光栅与二维光栅；
5. 小透镜；
6. 光屏夹：用于夹白纸等平面作为光屏，方便光屏取下处理；
7. 大透镜。

### 3 实验数据分析

#### 3.1 小透镜焦距 $f$ 的测量

##### 3.1.1 光路图与测量方法

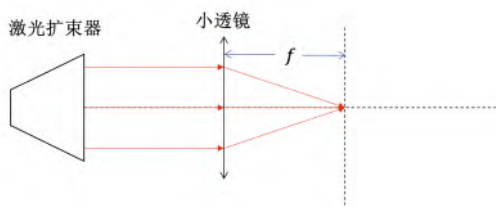


图 3: 小透镜焦距测量理论光路图。

如图3所示，我们可以让激光平行穿过透镜，然后移动像平面，寻找汇聚的激光亮斑最小的点，此时像平面与透镜的距离即为小透镜的焦距。

##### 3.1.2 测量结果

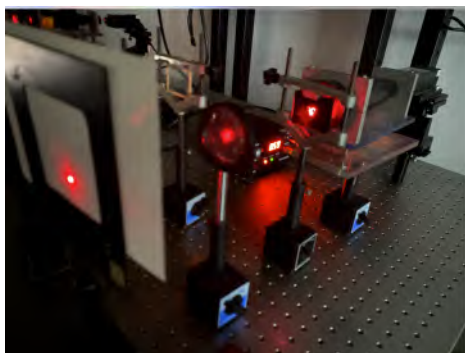


图 4: 测量小透镜焦距时找到的光斑最小的点，测量透镜到光屏的距离。

通过来回移动像平面得到亮斑最小时像平面与小透镜之间的距离（小透镜的焦距）为：

$$f = 15 \text{ cm.}$$

#### 3.2 一级光栅光栅常数的测量

##### 3.2.1 光路图

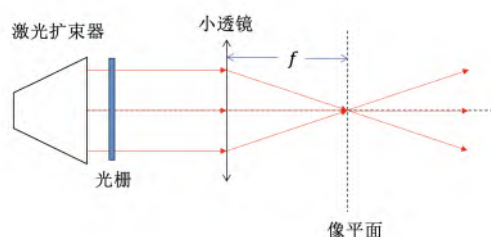


图 5: 测量光栅常数光路图。

如图5，我们直接让平行光通过光栅，从而入射光的函数可以写为光栅透射函数与传播子的乘积。

##### 3.2.2 现象与计算结果



图 6: 一维光栅衍射在通过透镜后呈现为横向等间距的点，光强从 0 级衍射斑到两侧逐渐减小。

一维光栅的透射函数可以用周期性排列的 Dirac Delta 函数 (Dirac comb) 表示：

$$t(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nd). \quad (8)$$

其中  $d$  为光栅常数，这里求和上下限在足够大时不影响结果，因此我们选取为  $\pm\infty$ 。根据理论分析，像平面的呈现结果应该是透射函数的傅立叶变换<sup>[1]</sup>：

$$\mathcal{F}[t(x)] = \frac{1}{d} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\left(u - \frac{m}{d}\right). \quad (9)$$

因此像平面也是一组 Delta 函数, 频率间隔  $\Delta u = \frac{\Delta x}{\lambda f} = \frac{1}{d}$ , 因此我们可以算出光栅常数:

$$d = \frac{\lambda f}{\Delta x} = \frac{671 \text{ nm} \times 15 \text{ cm}}{0.26 \text{ cm}} = 38.7 \mu\text{m}. \quad (10)$$

### 3.3 频谱面滤波处理

#### 3.3.1 一维光栅

实验对一维光栅的像平面做了三种滤波处理, 处理方式与结果如下:

(1) 仅让 0 级光斑通过: 平面光照均匀, 无条纹;

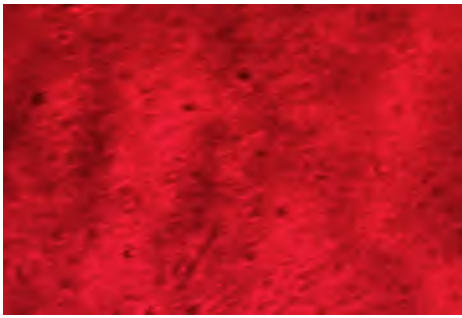


图 7: 仅让一维光栅 0 级光斑通过后的像.

(2) 仅让 0 级与  $\pm 1$  级光斑通过: 有明显的条纹出现;

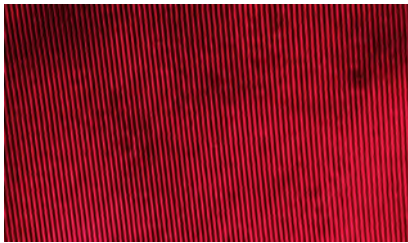


图 8: 仅让一维光栅 0 级与  $\pm 1$  级光斑通过后的像.

(3) 仅让 0 级与  $\pm 2$  级光斑通过: 有条纹出现, 相较于让 0 级和  $\pm 1$  级条纹穿过的结果而言, 条纹模糊且间距更小;

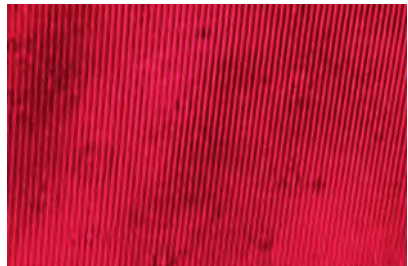


图 9: 仅让一维光栅 0 级与  $\pm 2$  级光斑通过后的像.

从滤波结果定性分析:

1. 仅让 0 级光斑通过, 实际上透射的函数为  $\tilde{f}(x) = \delta(u)$ , 在傅立叶变换后得到的光场为  $f \equiv 1$ , 是均匀分布的光场;
2. 让 0 级与  $\pm m$  ( $m = 1, 2$ ) 级光斑通过, 透射函数则写为  $\tilde{f}(x) = \sum_{n=-m, 0, m} \delta\left(u - \frac{n}{d}\right)$ , 傅立叶变换后的函数为  $f = \left(1 + 2 \cos \frac{2m\pi}{d}x\right)$ , 表现为中间强两侧弱的条纹, 空间频率为  $\frac{m}{d}$ . 同时可以看出  $m = 2$  时空间频率更大, 条纹间距更小.

#### 3.3.2 二维光栅



图 10: 二维光栅透射光在透镜变换后像平面上的像.

实验对二维光栅的像平面做了四滤波处理, 处理方式与结果如下:

(1) 仅让含 0 级光斑的水平点阵通过: 有竖直条纹;

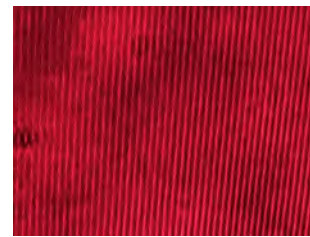


图 11: 仅让含 0 级光斑的水平点阵通过后的像.

(2) 仅让含 0 级光斑的竖直点阵通过: 有横向条纹



图 12: 仅让含 0 级光斑的竖直点阵通过后的像.

- (3) 仅让含 0 级光斑的  $45^\circ$  方向点阵阵通过: 有与透射点阵方向垂直的条纹.

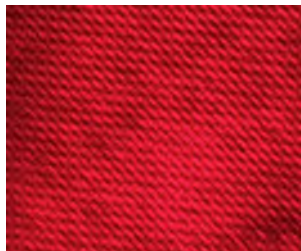


图 13: 仅让含 0 级光斑的  $45^\circ$  方向点阵阵通过后的像.

实际上我们可以轻松推广这个结论: 仅让含 0 级光斑的直线点阵通过, 最后得到的像为方向与点阵方向垂直的条纹. 其证明我们可以考虑特殊情况, 即仅让水平方向点阵透过: 首先二维光栅的透射函数是二维 Dirac comb:

$$f(x, y) = \sum_{m, n} \delta(x - md) \cdot \delta(y - nd).$$

傅立叶变换后的函数是二维平面上的 Dirac 函数:

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{m, n} \delta\left(u - \frac{m}{d}, v - \frac{n}{d}\right).$$

因此在滤过竖直点阵后函数仅与水平方向有关, 即一组水平的 Dirac comb 进行傅立叶变换. 最后像为:

$$f_F(x, y) = \mathcal{F}\left[\delta\left(u - \frac{m}{d}\right)\right] = \sum_m e^{i2\pi mx/d}.$$

强度在水平方向做周期变换, 条纹呈现竖直方向.

### 3.3.3 汉字屏

实验首先要求在像面上仅看到一个汉字, 没有条纹, 类比于一维光栅, 我们仅让像平面 0 级光斑通过:



图 14: 仅让 0 级光斑通过后的像.

第二个实验要求像面的汉字中仅有竖条纹, 没有横条纹, 类比于二维光栅, 我们仅让含 0 级光斑的横向点阵通过:



图 15: 仅让含 0 级光斑的横向点阵通过后的像.

## 4 思考与总结

### 思考题

1. 在实验中的一维光栅空间滤波实验中如果挡掉频谱面上零级光斑, 让所有高级衍射光斑透过, 在像平面得到的像是什么样的? 分别分析光栅透光缝  $a$  在小于、等于和大于光栅周期  $\frac{d}{2}$  的情况像平面图象有何特点。

在一维光栅空间滤波实验中, 若在傅立叶频域遮挡零级光斑, 则像面上图像失去低频成分, 呈现不同程度的条纹增强或消失. 对于  $a < \frac{d}{2}$  的窄缝光栅, 滤波后图像表现为边缘锐化, 中间暗带明显; 对于  $a = \frac{d}{2}$ , 图像呈现清晰条纹, 亮斑对称分布但中心消失; 而当  $a > \frac{d}{2}$  时, 高频成分极弱, 滤波后图像几乎完全消失.

2. 本实验中长焦距的傅立叶透镜和短焦距傅立叶



透镜在观察光栅的空间频谱时有何区别,为什么?

长焦距的傅立叶透镜观察到的像平面上的光斑间距更大. 理论推导过程中我们可以由公式10导出光斑间距满足:

$$\Delta x = \frac{f\lambda}{d}.$$

因此在光栅常数相同的情况下, 焦距越大光斑间距越大.

3. 利用单透镜光路进行光栅的空间滤波实验时, 在什么位置观察像面较为合适, 为什么?

在远场面观察可以观察到图像. 由于缺少第二个透镜将频域信息反变换回实空间, 滤波后的图样并不会直接出现在近场像面, 需依赖自由传播实现近似傅立叶逆变换. 实验中观察到, 只有将屏幕置于足够远的位置, 滤波后的空间图样才能清晰显现, 即我们理论部分推导过的远场极限下的计算结果(夫琅和费衍射).<sup>[8]</sup>.

## 总结

本实验通过搭建傅立叶光学基本光路, 观察不同频率成分对图像结构的影响, 深入理解了空间频率、频谱滤波与傅立叶变换在光学系统中的具体应用. 在实验过程中, 我们完成了透镜焦距的测量、光栅常数的计算, 并对一维与二维光栅进行了多种滤波实验操作. 通过屏蔽不同阶次频率分量, 清晰展示了频率方向与空间图像特征的对偶性, 验证了傅立叶光学理论的核心结论; 滤波实验中不使用第二透镜, 仅观察到图像在远场自然形成, 进一步说明了傅立叶变换与夫琅和费衍射之间的本质联系, 与理论推导部分形成对应, 验证了基于惠更斯-菲涅尔原理的傅立叶光学基础理论.

## 5 致谢

在《大学物理现代技术实验》课程“傅立叶光学”实验过程中, 我得到了姚志杭老师的耐心指导与悉心

帮助. 在实验设计、数据处理及报告撰写等方面, 姚老师给予了我极大的支持与鼓励, 特此致谢.

同时, 感谢中国科学技术大学提供良好的实验条件与学习平台, 使本实验得以顺利完成.

## 参考文献

- [1] GOODMAN J. Introduction to fourier optics [M/OL]. Macmillan Learning, 2017. <https://books.google.com/books?id=TKZQvgAACAAJ>.
- [2] SALEH B, TEICH M. Wiley series in pure and applied optics: Fundamentals of photonics [M/OL]. Wiley, 2020. <https://books.google.com/books?id=iozUDwAAQBAJ>.
- [3] ABBE E. Beiträge zur theorie des mikroskops und der mikroskopischen wahrnehmung[J]. Archiv für mikroskopische Anatomie, 1873, 9(1): 413-468.
- [4] PERRIN S, MONTGOMERY P. Fourier optics: basic concepts[A/OL]. 2018. arXiv: [1802.07161](https://arxiv.org/abs/1802.07161). <https://arxiv.org/abs/1802.07161>.
- [5] J.W. 顾德门, 等译詹达三. 傅立叶光学导论[M]. 科学出版社, 1979.
- [6] 轩植华, 霍剑青, 姚焜, 等. 大学物理实验第三册 [M]. 高等教育出版社, 2006.
- [7] ZAHID I A. Fundamentals of fourier optics [EB/OL]. 2010[2025-05-13]. <https://indico.ictp.it/event/a09133/session/8/contribution/6/material/0/0.pdf>.
- [8] ARISTIDI E. Fourier optics course[EB/OL]. 2020[2025-05-13]. [https://www-n.oica.eu/aristidi/Cours/FourierOptics\\_Course.pdf](https://www-n.oica.eu/aristidi/Cours/FourierOptics_Course.pdf).



## A 实验数据记录表

于波飞  
PB23020640

物理实验教学中心

## 实验课堂提交数据处理模板

1. 测量小透镜的焦距  $f$ 。测量得到的小透镜焦距是: 15cm

2. 实验中一维光栅的夫琅禾费衍射图样的衍射点强度分布如何? 给出解释:

横向等间距分布, 中间点最强, 向两侧依次减弱。  
通过光栅周期性衍射可看作 Fourier 变换, 点阵仍有均匀间距分布。  
一维光栅常数的测量和计算方法, 测量数据和计算结果:  
假设光栅为理想方波形光栅  
衍射面上空间频率  $f_x = \frac{n}{d} = \frac{x_n}{\lambda f}$ , 其中  $x_n$  为  $\pm n$  级衍射级到中心  
距离,  $\lambda$  为波长,  $f$  为透镜焦距, 测得  $x_n = 42.6\text{cm}$ , 求得光栅常数  $d = 32.7\mu\text{m}$ 。

3. 对于一维光栅的空间滤波实验: a. 滤波范本只让 0、 $\pm 1$  级通过。b. 滤波范本

只让 0、 $\pm 2$  级通过。在以上两种情况下分别画出或者描述像平面的图像。

0 级: 均匀光照平面。  
0、 $\pm 1$  级: 明显条纹。  
0、 $\pm 2$  级: 不明显条纹, 间距比 0、 $\pm 1$  级现象的条纹间距小。

对于二维光栅的空间滤波实验:

a. 滤波范本只让含 0 级的水平方向一排点阵通过。画出或者描述像平面的图像。

a. 只让含 0 级的水平点阵通过: 明显竖条纹。  
b. - - - 竖直点阵 - - - : 明显横条纹。  
c. - - - 45°方向点阵 - - - : 有不太明显的 135°条纹。  
d. - - - 135°方向点阵 - - - : 有不太明显的 45°条纹。

4. 汉字屏滤波: 若我们要得到 a. 在像面上仅看到一个汉字, 笔画中没有条纹, 应如何操作?

仅让中间 0 级条纹通过。

b. 像面上汉字笔画中仅有横条纹, 应该如何操作?

仅让含 0 级的水平点阵通过  
并削弱其他点阵的强度。

f. 28  
批阅