质点运动学

极坐标系 速度与加速度
$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$
$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$.
求导：$\dfrac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\hat{\theta}$.

曲率半径 自然坐标系
$R(t) = \dfrac{v^3(t)}{|\vec{a}(t) \times \vec{v}(t)|}$.

质点动力学

牛顿第二定律 微分方程的一种常见处理
$f(x) = m\ddot{x} \Rightarrow f(x)dx = m\ddot{x}dx = m\dot{x}\ddot{x}dt = m\dot{x}d\dot{x}$.

非惯性参考系

记号声明 $_0$ 表示非惯性系相对于惯性系的量，$'$ 表示物体相对于非惯性系的量

平动转动参考系 绝对微商（惯性系中）（$\vec{a}$ 是任意向量）
$\dfrac{D\vec{a}}{Dt} = \dfrac{d\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{a}$.
虚拟力
$\vec{f}_i = \vec{f}_a + \vec{f}_c + \vec{f}_{cor} + \vec{f}_{\Delta\omega}$
$= -m\vec{a}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v'} - m\dfrac{D\vec{\omega}}{Dt} \times \vec{r'}$.
其中 $\vec{f}_a$ 是平移惯力，$\vec{f}_{\Delta\omega}$ 是角速度变化产生的惯性力.

动量定理

质心动量定理 $_C$ 表示质心的量，$\vec{F}_{ex}$ 是相对于质点系的外力
$\int_{t_0}^{t} \vec{F}_{ex}\, dt = m_C\vec{v}_C - m_C\vec{v}_{C0}$.

变质量物体 $\vec{u}$ 是附着体的初速度，$\vec{v}$ 是主体的初速度，F 是主体和附着体所受的合力
$m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{u} - \vec{v})\dfrac{dm}{dt} + \vec{F}$.

两体碰撞 两体 m_1, u_1 与 m_2, u_2，完全弹性碰撞后有：
$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2}u_2 \\ v_1 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}u_2 \end{cases}$$

动能定理

质点系动能定理 要考虑内力做功
$E_k(t) = E_k(t_0) = A_{ex} = A_{in}$.

有心力 有心力是保守力，可以定义势能

质心系 柯尼希定理：体系动能等于质心动能与体系相对于质心系动能之和
$E_k = \dfrac{1}{2}m_C v_C^2 + E_{kC}$.
用动能定理时，选择质心系，惯性力做功为 0, 不需要考虑惯性力所做的功。

两体问题 两体间作用力 $\vec{F}$，约化质量 $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$，相对位矢 $\vec{r}$，则：
$\mu\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}, E_{kC} = \dfrac{1}{2}\mu v^2, \vec{L} = \mu\vec{r} \times \vec{v}$.
该表达式表示将参考系（设为 S）选择与任意一物体（假设为 m_2）相对静止时，$m_1 = \mu$，即可在 S 系中进行简单的运算（将 S 系视为惯性系），且 S 中求得的机械能即为质心系中的机械能.

两体碰撞 两体 m_1, u_1 与 m_2, u_2，恢复系数 $e = \dfrac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}$，
$\Delta E_k = \dfrac{1}{2}\mu(e^2 - 1)(u_1 - u_2)^2$.

角动量定理

角动量与力矩 动量 $\vec{p}$，角动量 $\vec{L}$，力矩 $\vec{M}$
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$.

质点系角动量守恒 外力给定点的总外力矩和为 0，角动量守恒

质心系角动量 体系角动量等于质心的角动量与体系相对于质心的角动量之和
$\vec{L} = \vec{L}_C + \vec{L}_{CM}$.

万有引力

能量 轨道半长轴为 a 物体的总能量，角动量 $l = mh$，$\dot{r}$ 是径向速度，物体角动量守恒，所以 l, h 均为定值
$a = -\dfrac{GMm}{2E}$.
$E = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}$
$= \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{L^2}{2mr^2} - G\dfrac{Mm}{r}$.
$E \geq 0$，物体做开放轨道运动；$E < 0$，物体做闭合轨道运动。

比内公式 $h^2u^2(\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u) = -\dfrac{f}{m}$.
$(h = \dfrac{L}{m} = r^2\dot{\theta}, u = \dfrac{1}{r}$，$f$ 为有心力)

轨道定律 $r = \dfrac{p}{1 + \epsilon\cos\theta}$.
其中 $p = \dfrac{L^2}{GMm^2}, \epsilon = \sqrt{1 + \dfrac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$. 可根据 E 的正负判断离心率 ϵ 的取值，进而确定轨道形状.

刚体

常用转动惯量 细棒关于中心 $I = \dfrac{1}{12}ml^2$，关于端点 $I = \dfrac{1}{3}ml^2$.
圆环关于轴线 $I = mR^2$，圆柱关于轴线 $I = \dfrac{1}{2}mR^2$.
圆球关于直径 $I = \dfrac{2}{5}mR^2$，球壳关于直径 $I = \dfrac{2}{3}mR^2$.
薄板关于中心垂直轴 $I = \dfrac{1}{12}m(a^2 + b^2)$，关于中心水平轴 $I = \dfrac{1}{12}ma^2$.

平行轴定理 $I_D = I_C + md^2$.

垂直轴定理 $I_z = I_x + I_y$.

直线运动	定轴转动
x	ϕ
$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	$\omega = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$
$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
m	$I = \sum \Delta m_i R_i^2$
$F = ma$	$M = I\beta$
$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$
$p = mv$	$L = I\omega$

平面平行运动 $\vec{F}_{ex} = m\vec{a}_C, M_z = I_z\beta, E_k = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}I_z\omega^2$.

纯滚动条件 $v_C = R\omega, a_C = R\beta$.

进动 $\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$.($M$ 是力矩，Ω 是进动角速度，L 是自转角动量 $L = I\omega$，ω 是自转角速度).

振动和波

简谐振动 $m\ddot{x} = -kx$, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. 振动方程：$x = A\cos(\omega t + \phi)$.
$E = \dfrac{1}{2}m\omega^2A^2, \bar{E_k} = \bar{E_p} = \dfrac{E}{2}$.
一维保守力定义势能 $V(x)$，有 $k = \dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}|_{x=x_0}$.

振动的合成 同方向相近频率的振动的合成：
$x_1 = A\cos(\omega_1 t + \phi_1), x_2 = A\cos(\omega_2 t + \phi_2)$.
$x = x_1 + x_2 =$
$2A\cos\left(\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \dfrac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \dfrac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$.
振幅变化频率
$\nu = \dfrac{|\omega_1 - \omega_2|}{2\pi} = |\nu_1 - \nu_2| = \Delta\nu$. 这一现象称之为**拍**，$\Delta\nu$ 称为拍频.

阻尼振动 $m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2x = 0$. 其中 γ 为阻力系数，β 为阻尼系数.
过阻尼 ($\beta > \omega$):$x = \mathrm{e}^{-\beta t}(A_1\mathrm{e}^{\sqrt{\beta^2 - \omega^2}t} + A_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\beta^2 - \omega^2}t})$.
欠阻尼 ($\beta < \omega$):$x = A_0\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega_f + \phi)$, $\omega_f = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$.
临界阻尼 ($\beta = \omega$):$x = (A_1 + A_2 t)e^{-\beta t}$. 品质因数 $Q = \dfrac{\omega}{2\beta}$.

受迫振动 $m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_0\cos\omega' t \Rightarrow \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2x = F_0\cos\omega' t$.
欠阻尼 $x = A_0\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega_f + \phi) + B\cos(\omega' t - \phi')$
$tan\phi' = \dfrac{2\beta\omega'}{\omega^2 - \omega'^2}, B = \dfrac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega'^2)^2 + 4\beta^2\omega'^2}}$.
能量共振：$\omega = \omega', B_r := B = \dfrac{F_0}{2\beta\omega}, \tan\phi = \infty, x = \dfrac{F_0}{2\beta\omega}\sin\omega t$. 此时驱动力功率最大、速度最大.
振幅共振：$\omega' = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2}$. 此时振幅最大.

波 运动学：$y = A\cos(\omega t - kx + \phi)$

波的传播 惠更斯原理，折射、反射定律

波的叠加 相干波和非相干波叠加：
驻波：介质中反向行进的相干平面简谐波叠加后的合成波实际上是一种振动，不再是振动的传播，成为驻波，驻波是各点振幅 ($|A'| = |2A\cos\left(kx + \dfrac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)|$) 不同的简谐振动的集体.
$|A'| = 2A$ 的位置称为波腹，$A' = 0$ 的位置称为波节，相邻波腹（节）间距离 $\dfrac{\lambda}{2}$.
波速：相速度：$u_p = \dfrac{\omega}{k}$
群速度：非相干波 ($\dfrac{\omega_1}{k_1} = u_1, \dfrac{\omega_2}{k_2} = u_2$) 叠加合成波包络线的峰值传播速度：$u_g = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$.

多普勒效应 在观察者和波源方向上，观察者以 v_D 运动，波源以 v_s 运动，两者趋紧的方向为正则：
$\dfrac{\nu'}{\nu} = \dfrac{1 + \frac{v_D}{u}}{1 - \frac{v_s}{u}}$.

常见的波 波动方程 $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

弹性棒上的纵波：$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$, Y 为杨氏模量，$F(x) = SY\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_x$，$\rho$ 为密度.

弦上横波：$v = \sqrt{\frac{N}{\rho}}$，$N$ 为切变模量.

声波（纵波）：$v = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$，$p$ 为空气压强（空气的杨氏模量）.

电磁波：$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$.

浅水波：$v = \sqrt{gh}$.

深水波：$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$.

流体

流体静力学方程 $\vec{f}$ 是单位质量上的力 (加速度):

$\rho \vec{f} = \vec{\nabla} p, \mathrm{d}p = \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z.$

定常流动 在欧拉法描述下 $\vec{v}$ 不随时间变化。

连续性方程：$\rho \vec{v} \cdot \Delta \vec{S} = const.$

伯努利方程：

$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho U + p = const.$(其中 U 为单位质量的势能)

粘滞流体 粘滞力（侧面）：$F = \eta \Delta S \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$.

泊肃叶公式：$Q = \int_0^R v 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{\pi(p_1 - p_2)R^4}{8l\eta}$.

雷诺数：$R_e = \frac{\rho v r}{\eta}$.

$R_e > 4000$ 湍流，$R_e < 2000$ 层流，

$2000 < R_e < 4000$ 不稳定.

斯托克斯公式：小球在粘滞流体中低速运动：

粘滞阻力：$f = 4\pi r v \eta$.

压差阻力：$f' = 2\pi r v \eta$.

相对论

记号声明 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = \frac{v}{c}$.

洛伦兹变换 K' 系以 v 沿 x 轴相对 K 系运动

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \gamma(x' + vt) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x \frac{v}{c^2}} \\ u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x \frac{v}{c^2})} \\ u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x \frac{v}{c^2})} \end{cases} \quad \begin{cases} u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u_x \frac{v}{c^2}} \\ u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + u_x \frac{v}{c^2})} \\ u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + u_x \frac{v}{c^2})} \end{cases}$$

多普勒效应 $f' = \frac{1}{\gamma(1 - \beta\cos\phi)}f$.

相对性 时缓：$\Delta t = \gamma \Delta t'$，尺缩 $\ell = \sqrt{1-\beta^2}\ell'$.

相对论力学 设物体静质量 m_0，速度 v

$$\begin{cases} m = \gamma m_0 \\ p = mv \\ E = mc^2 \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2}m_0 v^2 \\ E^2 = p^2c^2 + m_0^2 c^4 \end{cases}$$

对静质量为零的粒子有 $E = pc$.

补充

球冠体积 $V = \frac{\pi 2h^2}{3}(3R - h)$.

三向量叉乘 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

常用常量 重力加速度 $g = 9.8\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, 光速 $c = 3\times10^8\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

万有引力常量 $G = 6.67\times10^{-11}\mathrm{m^3{\cdot}(kg{\cdot}s)^{-2}}$.

地球质量 $M = 6\times10^{24}$kg，半径 $R = 6371$km.

太阳质量 $M_S = 2\times10^{30}$kg.

15 摄氏度,1atm 的空气：$p = 10^5\mathrm{N{\cdot}m^{-2}}$,$\rho = 1.2\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

实际声速 $v = 340\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

⋆ 祝考试顺利！⋆