

大学物理现代技术实验——卢瑟福散射

于洪飞 PB23020640[†][†] 中国科学技术大学 物理学院, 合肥 230026

摘要 本实验模拟卢瑟福散射过程, 研究 α 粒子在 Coulomb 势场中的散射行为, 旨在验证 Rutherford 散射公式, 并计算 α 粒子的能量. 实验分为两部分: 其一, 通过调节散射腔压强, 测量固定散射角下的计数率, 以验证粒子计数率与靶厚度之间的关系, 并计算粒子能量; 其二, 在恒定低压条件下, 测量不同散射角下的计数率, 验证微分散射截面随角度变化的反比四次关系. 实验通过线性拟合、函数反解等方法得到了粒子的能量、射程及散射强度分布规律, 结果基本符合理论预期, 验证了 Rutherford 散射模型的适用性与实验装置的有效性.

关键词 卢瑟福散射; α 粒子; 微分散射截面

College Physics Experiment III – Rutherford Scattering

YU Hongfei[†][†]School of Physical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026**Abstract**

This experiment simulates the Rutherford scattering process to investigate the behavior of α particles scattered in a Coulomb potential field, with the aim of verifying the Rutherford scattering formula and determining the energy of the α particles. The experiment consists of two parts: first, by adjusting the pressure in the scattering chamber and measuring the counting rate at a fixed scattering angle, we examine the relationship between particle count and target thickness, and calculate the particle energy; second, under constant low pressure, we measure the counting rates at different scattering angles to verify the inverse fourth-power dependence of the differential scattering cross section on the scattering angle. Using linear fitting and analytical inversion methods, we obtained the energy, range, and scattering intensity distribution of the particles. The results are in good agreement with theoretical predictions, confirming the validity of the Rutherford scattering model and the reliability of the experimental setup.

Keywords Rutherford Scattering; α Particle; Differential Scattering Cross Section

引言

1909 年, Rutherford 通过 α 粒子轰击金箔的实验, 观察到少量粒子以大角度散射, 这一结果无法用 Thomson 的“西瓜模型”^[1]解释, 由此提出了著名的原子核模型.^[2]这一实验不仅促成了原子物理学的重大突破, 也奠定了后续核反应、粒子散射等研究的基础.

本实验通过模拟 Rutherford 散射过程, 定量研究 α 粒子与靶核发生库仑散射时的空间分布特性与强度变化. 具体包括两个方面: 首先, 通过调节散射腔压强, 测量在固定散射角度下的探测器接收计数, 从而计算粒子的平均自由程与能量; 其次, 在恒定真空条件下, 测量不同散射角度下的计数率分布, 以验证 Rutherford 散射公式中预言的散射强度与角度之间的关系.^[3]

该实验不仅加深了我们对经典电荷散射理论的理解, 也培养了我们在控制变量、数据拟合方面的实

验技能, 全面提升了我们的物理素养.

1 理论模型

1.1 经典力学下的结果^[3-5]

经典力学下的 Rutherford 散射正是散射在势能取为库伦势时的特殊结果. 考虑最简单的散射模型, 我们采用图 1 的记号约定:

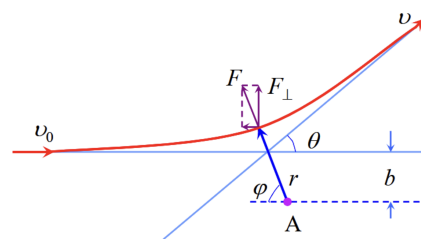


图 1: 常见的散射模型.

其中入射速度 v_0 、瞄准距离 b 、出射速度 v 。Rutherford 散射作为散射的一种（粒子在 Coulomb 势场中运动），自然满足角动量守恒极坐标 (r, φ) 下我们写出角动量守恒：

$$L = mbv_0 = mr^2 \frac{d\varphi}{dt}, \quad (1)$$

$$\Rightarrow dt = \frac{r^2}{v_0 b} dr. \quad (2)$$

考虑散射角 θ 时，我们讨论垂直于入射方向上的动量定理：

$$m \frac{dv_{\perp}}{dt} = F_{\perp} \Rightarrow v_{\perp f} = \frac{1}{m} \int_0^{\pi-\theta} F(\varphi) dt(\varphi).$$

其中 $v_{\perp f} = v \sin \theta$, $F_{\perp} = F_{\text{Coulomb}} \sin \varphi$, 下角标 f 表示末态 (final). 我们带入公式 (2) 与库仑力 $F_{\text{Coulomb}} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ 得到：

$$\begin{aligned} v \sin \theta &= \int_0^{\pi-\theta} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0 b} \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0 b} (1 + \cos \theta). \end{aligned}$$

考虑能量守恒 $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$ ，我们最终得到：

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{2b}{a}. \quad (3)$$

其中 a 为 Rutherford 散射因子：

$$a := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{2E}.$$

实际测量中我们无法准确的测量粒子的入射速度与瞄准距离，一个可以测量的物理量是微分散射截面 (differential scattering cross section) $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.

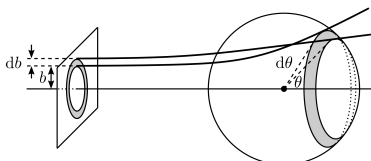


图 2: 微分散射截面.

其中：

$$d\sigma = 2\pi b |db|,$$

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{2\pi r^2 \sin \theta d\theta}{r^2}.$$

带入 $b = \frac{a}{2} \cot \theta$ ，我们最终算得：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi a^2}{4} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta / 4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \quad (4)$$

$$= \frac{a^2}{16} \sin^{-4} \frac{\theta}{2}. \quad (5)$$

考虑可能存在的标量

1.2 非相对论量子力学下的结果 [6-7]

量子力学中，我们以 Hilbert 空间中的态矢计算散射的结果，对于如下的粒子散射：

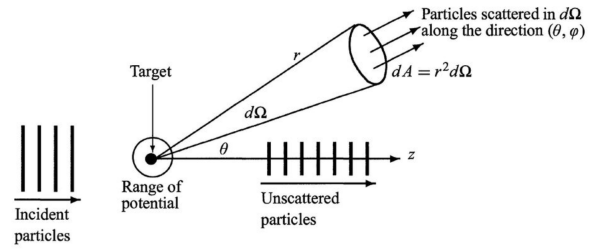


图 3: 量子力学中的散射.

我们考虑波函数：

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{ikz} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}.$$

其中坐标原点为靶核， z 为入射方向， $\vec{k} := \frac{\vec{p}}{\hbar}$. 前一项包含了入射波和出射波未被散射的部分；后一项我们考虑到粒子在散射后的渐近行为，即粒子在被散射后在 $r \rightarrow \infty$ 没有相互作用势，波函数为球面波的形式，系数 $f(\theta, \varphi)$ 被称为散射振幅 (scattering amplitude).

考虑散射后粒子的概率流密度：

$$J_s = \frac{i\hbar}{2\mu} (\psi_s \partial_i \psi_s^* - \psi_s^* \partial_i \psi_s).$$

其中下标 s 表示被散射后的物理量， μ 为约化质量.

同样考虑 $r \rightarrow \infty$ 的渐近行为, 粒子被散射到 (θ, φ) 立体角的概率写为:

$$dP = J_s d\Omega = \frac{\hbar k}{\mu} |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega.$$

同理可以写出入射波函数 $\psi_{in} = e^{ikz}$ 的概率:

$$dP = J_{in} d\Omega = \frac{\hbar k}{\mu} d\Omega.$$

联立得到量子力学下的微分散射截面为:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2.$$

对于散射振幅的求解, 一方面我们可以通过求解 Lippmann-Schwinger 方程, 并利用 Born 近似得到结果, 这里不赘述求解过程. 值得一提的是, 在求解过程中我们添加了屏蔽项¹并将势能写为:

$$V = \frac{\alpha}{r} e^{-\frac{r}{a}}.$$

其中 a 为力程, 我们令 $a \rightarrow \infty$ 得到了 Coulomb 势, $\alpha = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0}$. 计算散射振幅得到了与经典力学一致的结果:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4\mu^2 v^2} \sin^{-4} \frac{\theta}{2} = \frac{a^2}{16} \sin^{-4} \frac{\theta}{2}.$$

其中 $v := \frac{\hbar k}{\mu}$, 令人惊奇的“巧合”是量子化带来的 $\hbar$ 完全消除了, 这实际上是 Coulomb 势作为长程力带来的结果.

另一方面如果我们不引入汤川势, 而严格求解过话, 最终结果仅与 Born 近似的结果相差一个与能量 E 有关的相位^[8]:

$$e^{i\delta(E)} = \frac{\Gamma(1 + \mu\gamma_E)}{\Gamma(1 - i\gamma_E)}.$$

这个相位并不影响本实验的观测结果.

1.3 相对论量子力学下的结果^[6]

相对论量子力学下的散射计算需要量子场论与量子电动力学相关内容, 这里不过多赘述仅给出结果:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a'^2}{16} \sin^{-4} \frac{\theta}{2} \frac{1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\beta^2}.$$

其中 a' 是将 a 中物理量换为相对论下量的结果 ($p \rightarrow p' = \gamma mv$), $\beta = \frac{v}{c}$ 是相对论修正因子, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ 为 Lorentz 因子. 可以发现, 在 $v \ll c$ 的低速近似下, 散射退化为非相对论量子力学的结果:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{16} \sin^{-4} \frac{\theta}{2}} \quad (6)$$

也就是说, 在低速近似下, 我们可以认为本实验的理论是严格成立的.

¹ 也称为汤川势, Yukawa potential.

2 实验仪器与实验方法^[3]

2.1 实验仪器

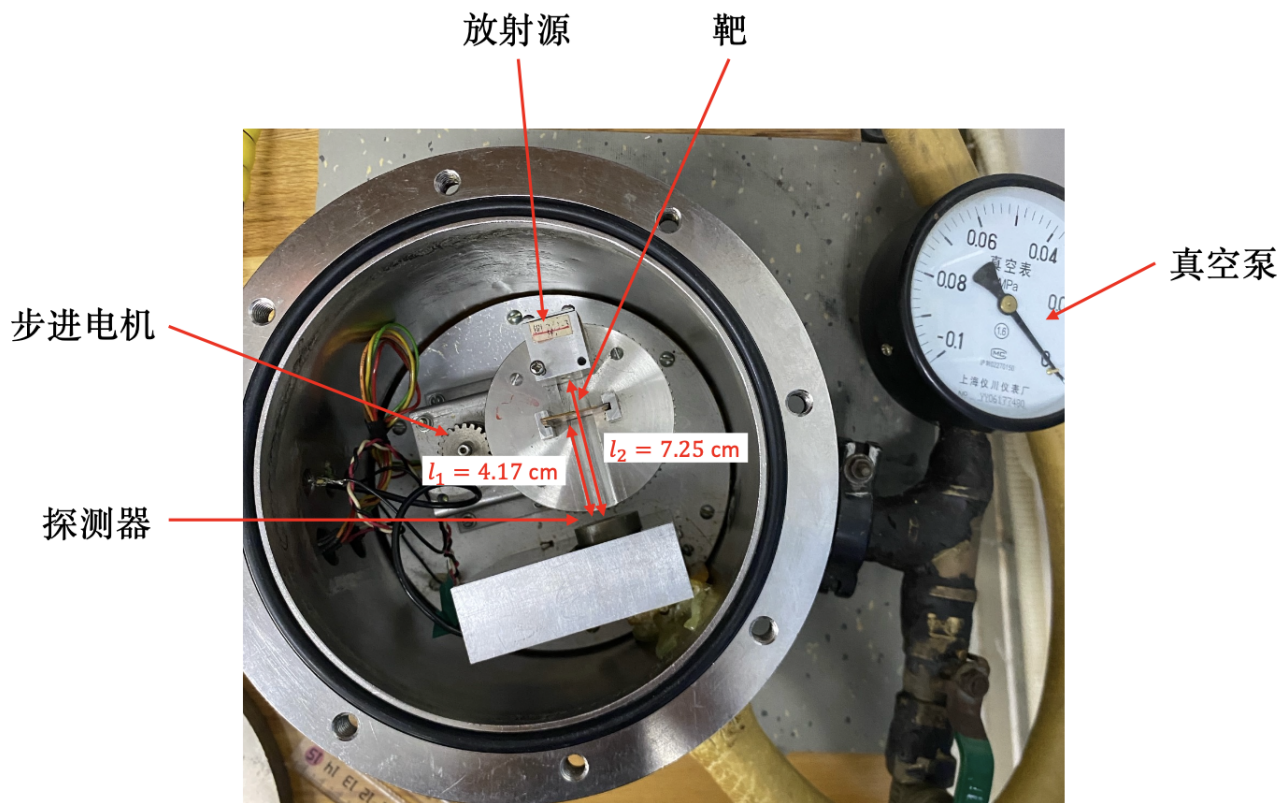


图 4: 实验装置.

本次试验使用的装置如图所示:

- 放射源: ^{241}Am 放射源, 发生 α 衰变 $^{241}_{95}\text{Am} \rightarrow ^{237}_{93}\text{Np} + \alpha + \gamma$, α 粒子参考能量 5.486 MeV;^[9]
- 靶: 可更换靶, 本次实验使用了空气靶和金箔两种;
- 步进电机: 精度 (步数) 为 1° , 控制源-靶平台的旋转, 改变探测器探测的散射角;
- 探测器: 金硅面垒探测器 $\text{Si}(\text{Au})$, 接收粒子并计数;
- 真空泵: 控制散射环境 (腔体) 内的压强.

2.2 实验方法

在理论推导部分我们已经得出了 Rutherford 的公式:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{16} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$



我们需要考虑如何通过可观测量来进行公式 (6) 的验证. 对于放射源, 理想情况下单位时间通过靶截面的粒子数是固定的, 记为 N_0^2 , 则根据微分散射截面的定义, 单位时间在 $d\Omega$ 上接收到的粒子数量为:

$$dn = N_0 \frac{d\sigma}{\sigma} nV.$$

其中 nV 是靶在体积 V 内的原子数, 令靶厚度 $t = \frac{V}{\sigma}$, 对上式积分得到:

$$N = N_0 n t \Omega \frac{a^2}{16} \sin^{-4} \frac{\theta}{2}. \quad (7)$$

值得一提的是我们在推导理论公式 (7) 时做的理想假设:

1. α 粒子只发生单次散射;
2. α 粒子与靶核之间只有 Coulomb 相互作用;
3. 忽略靶的核外电子且认为靶核静止.

上面三条近似是造成实验误差的主要来源.

3 实验数据分析

3.1 α 粒子能量 E 的测量

3.1.1 物理零度角度测量

在放置空气靶的情况下, 计数 $t = 60$ s, 测得 ROI 在 200 ~ 1000 的粒子数量 N 与角度 θ 关系如下:

表 1: α 粒子能量测量实验中物理零度角的校对

角度 θ	-5°	-4°	-3°	-2°
选区计数 Nt	27110	40835	58270	75796

角度 θ	-1°	0°	1°	2°
选区计数 Nt	88286	96156	96585	89937

角度 θ	3°	4°	5°
选区计数 Nt	78070	61158	44618

可以看出 1° 时选区计数最大, 因此 1° 对应物理零度角, 重设步进电机 1° 为 0° .

3.1.2 $P - N$ 测量

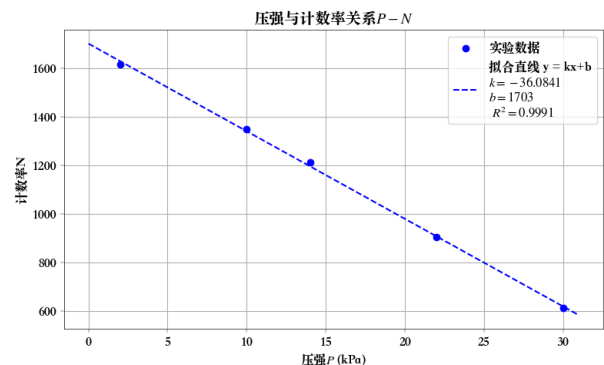
在物理零度角下改变压强 P , 测得 $t = 120$ s 时, ROI 200 ~ 1000 范围内选区计数 Nt 与 P 的对应关系如下:

表 2: α 粒子能量测量实验中不同压强 P 下选区计数 N

压强 P (kPa)	2	10	14
选区计数 Nt	194013	162097	145600

压强 P (kPa)	22	30
选区计数 Nt	108656	73671

直线拟合 $N - P$ 得到:



² 实验中我们采用粒子在时间上的平均来代替系综平均, 从而得到这个“理想情况下”的结果.

图 5: 实验测得的压强与计数率关系.

其中拟合曲线:

$$N = -36.0841P + 1703. \quad (8)$$

线性相关程度 $R^2 = 0.9991$. 由此可知:

$$N_0 = 1703.$$

3.1.3 α 粒子射程计算

当计数 $N = \frac{N_0}{2} = 851$ 时的粒子运动距离即为射程:

$$R' = l_2 = 7.25 \text{ cm}.$$

对应的压强可以通过公式 8 算出, 结果为:

$$P' = 23.583 \text{ kPa}.$$

同截面情况下我们有 $\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, 且考虑附录 中的空气密度公式:

$$\rho = 1.293 \times \frac{P}{101.325} \times \frac{273}{T}.$$

可以算出温度相同时 $\frac{R_1}{R_2} = \frac{P_2}{P_1}$, 因此我们将 $P' = 23.583 \text{ kPa}$ 下的射程换算到 $P = 101.235 \text{ kPa}$ 下得到:

$$R = 1.69 \text{ cm}.$$

3.1.4 α 粒子能量计算

考虑经验公式^[3]:

$$R = (0.285 + 0.005E)E^{1.5}.$$

为超越方程 (其中 R 单位为 cm , E 单位为 MeV). 我们可以考虑利用 Newton 迭代法或弦截法 (Secant Method) 来求解非线性超越方程的根:

$$f(x) = (0.285 + 0.005x)x^{1.5} - 1.69.$$

代码及结果见附录 B, 最终计算结果为:

$$E = 3.16 \text{ MeV}.$$

相比于理论提供的结果 $E_{\text{theoretical}} = 5.486 \text{ MeV}$, 误差为:

$$\delta_E = \left| \frac{E - E_{\text{theoretical}}}{E_{\text{theoretical}}} \right| = 42.4\%.$$

定性分析最终实验结果相比理论结果较小的原因, 可能的原因有:

1. α 粒子在空气内多次散射, 导致接收率较小, 从而计算的射程较小;
2. 实验非严格真空, $P \approx 2 \text{ kPa}$, 导致 N 偏小;
3. 经验公式与实验环境存在一定的差异.

3.2 验证 $N \propto \sin^{-4} \frac{\theta}{2}$

3.2.1 物理零度角度测量

在放置金箔靶的情况下, 计数 $t = 90 \text{ s}$, 测得 ROI 在 $200 \sim 1000$ 的粒子数量 N 与角度 θ 关系如下:

表 3: 验证 $N - \theta$ 关系实验中物理零度角的校对

角度 θ	-3°	-2°	-1°	0°
选区计数 Nt	5605	6128	6458	6546

角度 θ	1°	2°	3°
选区计数 Nt	6626	6353	6071

可以看出 1° 时选区计数最大, 因此 1° 对应物理零度角, 重设步进电机 1° 为 0° .

3.2.2 $\theta - N$ 测量

在真空下改变物理角度 θ , 测量不同 t 写下, ROI $200 \sim 1000$ 范围内选区计数 Nt 与 θ 的对应关系如下:

表 4: 验证 $N - \theta$ 关系实验中不同时间 t 及不同角度 θ 下的选区计数 N

角度 θ	10°	13°	16°
时间 t (s)	200	300	600
选区计数 Nt	3332	2193	2066

角度 θ	19°	22°
时间 t (s)	900	1200
选区计数 Nt	1330	868

直线拟合 $N - \sin^{-4} \frac{\theta}{2}$ 得到:

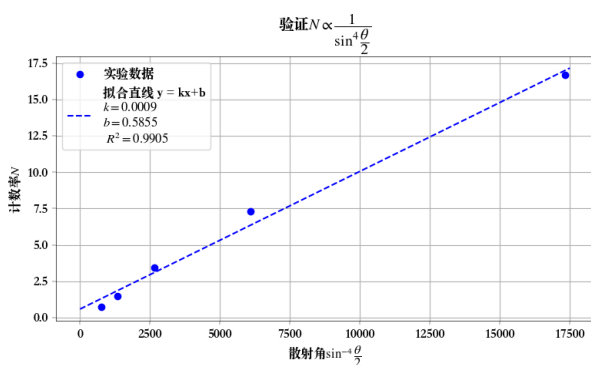


图 6: 实验测得的散射角与计数率关系.

其中拟合曲线:

$$N = 0.0009 \sin^{-4} \frac{\theta}{2} + 0.5855. \quad (9)$$

线性相关程度 $R^2 = 0.9905$.

3.2.3 $K = N \sin^4 \frac{\theta}{2}$ 计算与验证

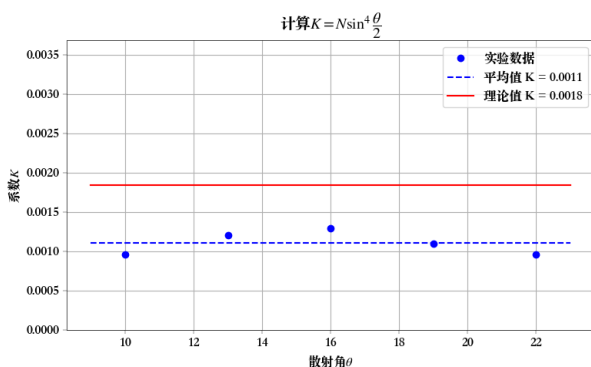


图 7: 实验数据计算得到的 K 值.

计算 $K = N \sin^4 \frac{\theta}{2}$ 理论值:

$$\begin{aligned} K_{\text{theoretical}} &= 4.8065 \times 10^{-34} \frac{N_0}{E^2 l_1^2} \\ &= 4.8065 \times 10^{-34} \times \\ &\quad \frac{1703}{(3.16 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19})^2 \times 0.0417^2} \\ &= 0.0018 \end{aligned}$$

相比于实验测量的平均结果 $K_{\text{experiment}} = 0.0011$, 误差为:

$$\delta_K = \left| \frac{K_{\text{experiment}} - K_{\text{theoretical}}}{K_{\text{theoretical}}} \right| = 38.9\%.$$

定性分析最终实验结果相比理论结果较小的原因, 可能的原因有:

1. α 粒子会在金箔内发生多次散射, 导致有更少的粒子到达探测器, N 偏小;
2. 实验非严格真空, $P \approx 2 \text{ kPa}$, 导致 N 偏小.

4 思考与总结

思考题

1. 根据卢瑟福公式 $N \sin^4 \frac{\theta}{2}$ 应为常数, 本实验的结果有偏差吗? 试分析原因.

由图 7 可见, 实验结果有一定的上下浮动, 浮动误差来源于:

- (a) 实验真空度低: 本实验散射环境实际上仍有 2 kPa 的压强, 并非完全真空, α 粒子与空气散射, 可能造成误差;
- (b) 探测时间短: 本实验探测时间有限, 无法达到理想假设的效果, 存在随机性误差;
- (c) 理论公式误差: 如 2.2 实验方法中的理论公式成立条件所说, 理论公式存在很多近似, 实验结果一定与理论结果存在差别.

2. 若人体肌肉组织的密度为 1.10 g/cm^3 , 根据实验内容 4 的结果估算本实验中的 α 粒子在人体肌



肉组织中的射程，单位取 cm.

考虑射程与密度成反比，我们直接写出：

$$\begin{aligned} R_{\text{muscle}} &= \frac{\rho}{\rho_{\text{muscle}}} R \\ &= \frac{1.18 \times 10^{-3}}{1.10} \times 1.69 \text{ cm} \\ &= 18.1 \mu\text{m}. \end{aligned}$$

总结

本实验通过对 α 粒子在不同压强和不同散射角下的散射计数测量，较为系统地验证了卢瑟福散射理论的基本结论.

在 α 粒子能量测量实验中，利用压强控制 α 粒子的有效射程，拟合并计算出 α 粒子的平均能量. 在验证 $N - \theta$ 实验中，通过测量不同角度对应的计数率并进行 $N \sim \sin^{-4}(\theta/2)$ 拟合，进一步验证了微分散射截面的反比四次角度依赖关系.

虽然实验存在部分系统误差（如真空度不够、散射角度设定精度有限等），但总体上实验结果与理论公式具有良好的一致性，验证了 Rutherford 公式的正确性.

5 致谢

在《大学物理现代技术实验》课程“卢瑟福散射”实验过程中，我得到了蔡俊老师的耐心指导与悉心帮助. 在实验设计、实验操作、数据处理及报告撰写等方面，蔡老师给予了我极大的支持与鼓励，特此致谢.

同时，感谢中国科学技术大学提供良好的实验条件与学习平台，使本实验得以顺利完成.

参考文献

- [1] THOMSON J J. Xl. cathode rays[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1897, 44(269): 293-316.
- [2] RUTHERFORD E, ROYDS T. Xxi. the nature of the α particle from radioactive substances[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1909, 17(98): 281-286.
- [3] 中国科学技术大学大学物理实验教学中心. 卢瑟福散射[M]. 中国科学技术大学, 2025.
- [4] 褚圣麟. 原子物理学[M]. 高等教育出版社, 1979: 62-70.
- [5] 高显. 经典力学[M]. 科学出版社, 2023.
- [6] 刘元彻, 刘宇航. 我们如何计算散射[EB/OL]. (2023-04-15)[2025-06-01]. <http://home.ustc.edu.cn/~liuyuanche/assets/file/Rutherford%20Scattering.pdf>.
- [7] 陈童. 量子力学新讲[M/OL]. 2024[2025-06-01]. <https://newquanta.com/wp-content/uploads/2024/09/e3808ae9878fe5ad90e58a9be5ada6e696b0e8aeb2e3808be4b9a6e78988.pdf>.
- [8] SAKURAI J, NAPOLITANO J. Modern quantum mechanics[M/OL]. Cambridge University Press, 2020. <https://books.google.com/books?id=GdX7DwAAQBAJ>.
- [9] CONTRIBUTORS W. Americium-241[M/OL]. Wikipedia, The Free Encyclopedia, 2023[2025-06-01]. <https://en.wikipedia.org/wiki/Americium-241>.



A 实验数据记录表

卢瑟福散射

于洪飞 PB23020640 5.19晚三号楼

基本参数: 实验室温度 $T = 26.5^{\circ}\text{C}$ 靶-探头距离 $l_1 = (3.97 + 0.20) \text{ cm} = 4.17 \text{ cm}$ 源-探头距离 $l_2 = (7.05 + 0.20) \text{ cm} = 7.25 \text{ cm}$

实验内容:

一. 测量 α 粒子能量 E (空心靶)(1) 物理 0° 角测量 60s, ROI 200~1000

角度 θ	-5°	-4°	-3°	-2°	-1°	0°
选区计数 N	27110	40835	58270	75796	88286	96156
θ	1°	2°	3°	4°	5°	
N	96585	89937	78070	61158	44018	

(2) 物理 0° 时 $P \sim N$ 关系 120s, ROI 200~1000

压强 P	2 kPa	10 kPa	14 kPa	22 kPa	30 kPa
选区计数 N	194013	162097	145600	108656	73671

二. 验证 $N \propto \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$ 关系(1) 物理 0° 角测量 90s, ROI 200~1000

角度 θ	-3°	-2°	-1°	0°	1°	2°	3°
选区计数 N	5605	6128	6458	6546	6626	6353	6071

(2) 物理角度 $\theta \sim N$ 关系 ROI 200~1000

角度 θ	10°	13°	16°	19°	22°
时间 t	200s	300s	600s	900s	1200s
选区计数 N	3332	2193	2066	1330	868

B Newton 法与弦截法求解 α 粒子能量过程

代码

```
1 def Newton(f, df, x0, epsilon, MAXSTEP = 1000):
2     iterate = [x0]
3     for _ in (range(MAXSTEP+1)):
4         if df(x0) != 0:
5             x1 = x0 - f(x0)/df(x0)
6         else:
7             raise ValueError("0 cannot be divided")
8         # print(x1)
9         iterate.append(x1)
10        if abs(x1 - x0) < epsilon:
11            return iterate
12        else:
13            x0 = x1
14    return "There's no root around x0.", None
15
16 def Secant(f, x1, x2, epsilon, MAXSTEP = 1000):
17     iterate = [x1, x2]
18     f1 = f(x1)
19     for _ in (range(MAXSTEP+1)):
20         f2 = f(x2)
21         if f2 - f1 != 0:
22             x = x2 - f2*(x2-x1)/(f2-f1)
23         else:
24             raise ValueError("0 cannot be divided")
25         # print(x1)
26         iterate.append(x)
27         if abs(x - x2) < epsilon:
28             return iterate
29         else:
30             f1 = f2
31             x1 = x2
32             x2 = x
33    return "There's no root around x0.", None
34
35 def f(x):
36     return (0.285 + 0.005 * x) * pow(x, 1.5) - 1.69
37
38 def df(x):
39     return 0.4275 * pow(x, 0.5) + 0.0125 * pow(x, 1.5)
40
41 if __name__ == "__main__":
42     x0_newton = [0.1, 0.2, 0.9, 9.0]
```

```
43 for i in range(len(x0_newton)):
44     res = Newton(f, df, x0_newton[i], 1e-8)
45     print(f"Newton: x0 = {x0_newton[i]}, root = {res[-1]}, steps = {len(res) - 1}.")
46 x_secant = [[0, 0.1], [0, 0.2], [0, 1.0], [0, 9.0]]
47 for j in range(len(x0_newton[:])):
48     res = Secant(f, *x_secant[j], 1e-8)
49     print(f"Secant: x1 = {x_secant[j][0]}, x2 = {x_secant[j][1]}, root = {res[-1]},
        steps = {len(res) - 1}.")
```

输出

```
Newton: x0 = 0.1, root = 3.1603667461938865, steps = 7.
Newton: x0 = 0.2, root = 3.1603667461938865, steps = 7.
Newton: x0 = 0.9, root = 3.160366746193886, steps = 6.
Newton: x0 = 9.0, root = 3.1603667461938865, steps = 6.
Secant: x1 = 0, x2 = 0.1, root = 3.1603667461938842, steps = 10.
Secant: x1 = 0, x2 = 0.2, root = 3.1603667461938865, steps = 10.
Secant: x1 = 0, x2 = 1.0, root = 3.160366746193886, steps = 9.
Secant: x1 = 0, x2 = 9.0, root = 3.1603667461938865, steps = 9.
```

C 实验用到的物理常数与公式

C.1 物理常数参考值

			$t_{\text{Au}} = 5.0 \mu\text{m}$
$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$	$Z_{\text{Au}} = 79$	$M_{\text{Au}} = 197$	$\phi_{\text{Detector}} = 5.0 \text{ mm}$
$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$	$Z_{\text{Ag}} = 49$	$M_{\text{Ag}} = 108$	$z = 2$
$N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	$Z_{\text{Air}} = 14.5$	$M_{\text{Air}} = 29$	$\rho_{\text{Au}} = 19.3 \text{ g/cm}^3$
			$\rho_{\text{Ag}} = 10.5 \text{ g/cm}^3$

C.2 空气密度换算关系

在 0°C 、一个标准大气压下，空气密度为 1.293 kg/m^3 ，其余条件下的空气密度换算关系为：

$$\rho = 1.293 \times \frac{P}{101.325} \times \frac{273}{T}.$$

其中 P, T 分别为气压 (kPa)、绝对温度。