《电动力学（第四版）》（郭硕鸿）
习题解答

中国科大 2026 春

电动力学 A 助教

2026 年 4 月 11 日

目录

Chapter 2

静电场

1. 一个半径为 R 的电介质球，极化强度 $\boldsymbol{P} = K\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}$，电容率为 ϵ.

(1) 计算束缚电荷的体密度和面密度；

(2) 计算自由电荷体密度；

(3) 计算球外和球内的电势；

(4) 求该带电介质球产生的静电场总能量.

解:

(1) 束缚电荷体密度和面密度:

体密度:

$$\rho_P = -\nabla\cdot\boldsymbol{P} = -K\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^2} = -K\left(\nabla\frac{1}{r^2}\cdot\boldsymbol{r} + \frac{1}{r^2}\nabla\cdot\boldsymbol{r}\right) = -\frac{K}{r^2}$$

面密度（球外无极化，$\boldsymbol{P}_2 = 0$）:

$$\sigma_P = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}_1|_R = \boldsymbol{e}_r\cdot K\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\bigg|_R = \frac{K}{R}$$

(2) 自由电荷体密度:

由 $\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ 得

$$\boldsymbol{D} = \frac{\epsilon\boldsymbol{P}}{\epsilon - \epsilon_0}$$

$$\rho_f = \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \frac{\epsilon}{\epsilon - \epsilon_0}\nabla\cdot\boldsymbol{P} = \frac{\epsilon K}{(\epsilon - \epsilon_0)r^2}$$

(3) 球外和球内的电势:

球外电场（$r > R$）由高斯定理得:

$$E_{\text{out}} \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R \frac{\epsilon K}{(\epsilon - \epsilon_0) r^2} \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{4\pi\epsilon K R}{\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)}$$

$$\boldsymbol{E}_{\text{out}} = \frac{\epsilon K R}{\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0) r^2} \boldsymbol{e}_r$$

球外电势:

$$\phi_{\text{out}} = \frac{\epsilon K R}{\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0) r}$$

球内电场（$r < R$）:

$$\boldsymbol{E}_{\text{in}} = \frac{K}{(\epsilon - \epsilon_0)} \frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$$

球内电势:

$$\phi_{\text{in}} = \int_r^R \boldsymbol{E}_{\text{in}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \phi_{\text{out}}(R) = \frac{\epsilon K}{\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)} + \frac{K}{\epsilon - \epsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

(4) 总静电场能量:

总能量为 $W = \int \frac{1}{2} \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}V$。

球内能量:

$$W_{\text{in}} = 2\pi\epsilon R \left(\frac{K}{\epsilon - \epsilon_0} \right)^2$$

球外能量:

$$W_{\text{out}} = \frac{2\pi\epsilon^2 R K^2}{\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)^2}$$

总能量:

$$W = W_{\text{in}} + W_{\text{out}} = 2\pi\epsilon R \left(1 + \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) \left(\frac{K}{\epsilon - \epsilon_0} \right)^2$$

---

2. 在均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中置入半径为 R_0 的导体球，试用分离变数法求：

(1) 导体球接电池，保持电势 Φ_0；

(2) 导体球带总电荷 Q.

解：

(1) 导体球接电池，保持电势 ϕ_0：

定解条件：

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (R > R_0)$$

$$\Phi|_{R=R_0} = \Phi_0$$

$$\Phi|_{R\to\infty} = -E_0 R\cos\theta + \varphi_0$$

通解为

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}})P_n(\cos\theta)$$

代入边界条件得：

$$\Phi_{\text{out}} = -E_0 R\cos\theta + \varphi_0 + \frac{(\Phi_0 - \varphi_0)R_0}{R} + \frac{E_0 R_0^3}{R^2}\cos\theta$$

(2) 导体球带总电荷 Q：

边界条件变为

$$-\oint \epsilon_0 \frac{\partial\Phi}{\partial R}\mathrm{d}s = Q$$

解得：

$$\Phi_{\text{out}} = \varphi_0 - E_0 R\cos\theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{E_0 R_0^3}{R^2}\cos\theta$$

球内电势为常数：

$$\Phi_{\text{in}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} - \varphi_0$$

3. 均匀介质球中心置一点电荷 Q_f，球的电容率为 ε，球外为真空，用分离变数法求空间电势，把结果与使用高斯定理所得结果比较.

解:

高斯法:

球外（$R > R_0$）:

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon_0 R^2}\boldsymbol{e}_r, \quad \phi = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon_0 R}$$

球内（$R < R_0$）:

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon R^2}\boldsymbol{e}_r, \quad \phi = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon R} + \frac{Q_f}{4\pi R_0}\left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon}\right)$$

分离变量法:

电势由点电荷电势与极化电荷电势 ϕ' 叠加。设:

$$\phi_{\text{in}} = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon R} + a, \quad \phi_{\text{out}} = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon R} + \frac{b}{R}$$

利用边界条件在 $R = R_0$ 处 $\phi_{\text{in}} = \phi_{\text{out}}$ 及 $\epsilon\dfrac{\partial\phi_{\text{in}}}{\partial R} = \epsilon_0\dfrac{\partial\phi_{\text{out}}}{\partial R}$。

解得:

$$b = \frac{Q_f}{4\pi}\left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon}\right), \quad a = \frac{Q_f}{4\pi R_0}\left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon}\right)$$

结果与高斯法完全一致。

---

4. 均匀介质球（电容率为 ϵ_1）中心置一自由电偶极子 $\boldsymbol{p}_f$，球外充满了另一种介质（电容率为 ϵ_2），求空间各点的电势和极化电荷分布.

解:

设定解形式:

$$\phi = \frac{\boldsymbol{p}_f \cdot \boldsymbol{R}}{4\pi\epsilon_1 R^3} + \phi'$$

球内:

$$\phi_1 = \frac{p_f \cos\theta}{4\pi\epsilon_1 R^2} + A_1 R\cos\theta$$

球外:

$$\phi_2 = \frac{p_f \cos\theta}{4\pi\epsilon_1 R^2} + \frac{B_1}{R^2}\cos\theta$$

由边界条件在 $R = R_0$ 处 $\phi_1 = \phi_2$ 连续及 D_n 连续，解得:

$$A_1 = \frac{2(\epsilon_1 - \epsilon_2)p_f}{4\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)R_0^3}, \quad B_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)p_f}{4\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)}$$

极化面电荷密度:

$$\sigma_P = \left[(\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{\partial \phi_2}{\partial R} - (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{\partial \phi_1}{\partial R} \right]_{R=R_0} = -\frac{3\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_2) p_f \cos\theta}{2\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + 2\epsilon_2) R_0^3}$$

---

5. 空心导体球壳内外半径为 R_1 和 R_2，球心置一偶极子 $\boldsymbol{p}$，球壳上带电 Q，求空间各点电势和电荷分布.

解:

各区域电势:

区域 1（$r < R_1$）:

$$\phi_1 = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} - \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 R_1^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

区域 2（$R_1 < r < R_2$）: 导体内部为等势体

$$\phi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

区域 3（$r > R_2$）: 由高斯定理，偶极子对球外电场贡献为零（感应电荷抵消）

$$\phi_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

电荷分布:

内表面 $r = R_1$ 感应电荷面密度:

$$\sigma_{\text{ind}} = -\frac{3p\cos\theta}{4\pi R_1^3}$$

外表面 $r = R_2$ 自由电荷均匀分布:

$$\sigma_f = \frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

---

6. 在均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中置入一带均匀自由电荷 ρ_f 的绝缘介质球（电容率为 ϵ），求空间各点的电势.

解:

球内（$r < R_0$）:

$$\phi_{\text{in}} = \frac{\rho_f}{6\epsilon}(R_0^2 - r^2) - \frac{3\epsilon_0 E_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} r\cos\theta + \frac{\rho_f R_0^2}{3\epsilon_0}$$

或简化形式：

$$\phi_{\text{in}} = -\frac{\rho_f r^2}{6\epsilon} - \frac{3\epsilon_0 E_0 r\cos\theta}{\epsilon + 2\epsilon_0} + C_0$$

球外（$r > R_0$）：

$$\phi_{\text{out}} = -E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 R_0^3(\epsilon - \epsilon_0)}{r^2(\epsilon + 2\epsilon_0)}\cos\theta + \frac{\rho_f R_0^3}{3\epsilon_0 r}$$

利用边界条件 $r = R_0$ 处的 ϕ 与 D_n 连续方程联立解出系数 B_0, B_1, C_0, C_1，得最终结果。

球外电势包含点电荷项、偶极子感应项和外场项；球内电势包含体电荷贡献项和极化后的均匀场项。

7. 在一个很大的电解槽中充满电导率为 σ_2 的液体，使其中流着均匀的电流 $\boldsymbol{J}_{f0}$. 今在液体中置入一个电导率为 σ_1 的小球，求稳恒时电流分布和面电荷分布，讨论 $\sigma_1 \gg \sigma_2$ 及 $\sigma_2 \gg \sigma_1$ 两种情况的电流分布特点.

解:

首先求空间电势。由于是稳衡电流，满足 $\nabla^2\phi = 0$。

边界条件为：在 $r = R_0$ 处 $\phi_1 = \phi_2$ 且 $\sigma_1\dfrac{\partial\phi_1}{\partial r} = \sigma_2\dfrac{\partial\phi_2}{\partial r}$

当 $r \to \infty$ 时，$\phi_2 \to -E_0 r\cos\theta$，其中

$$J_{f0} = \sigma_2 E_0$$

解得电势分布为：

$$\begin{cases} \phi_1 = -\dfrac{3\sigma_2}{\sigma_1 + 2\sigma_2}E_0 r\cos\theta, & r < R_0 \\ \phi_2 = -E_0 r\cos\theta + E_0 R_0^3\left(\dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + 2\sigma_2}\right)\dfrac{\cos\theta}{r^2}, & r > R_0 \end{cases}$$

电流密度 $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E} = -\sigma\nabla\phi$:

球内电流为均匀分布：

$$\boldsymbol{J}_{\text{in}} = \frac{3\sigma_1}{\sigma_1 + 2\sigma_2}\boldsymbol{J}_{f0}$$

球外电流：

$$\boldsymbol{J}_{\text{out}} = \boldsymbol{J}_{f0} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)R_0^3}{\sigma_1 + 2\sigma_2}\left[\frac{3(\boldsymbol{J}_{f0}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{J}_{f0}}{r^3}\right]$$

面电荷分布：

$$\omega_f = \epsilon_0(E_{2n} - E_{1n}) = \frac{3(\sigma_1 - \sigma_2)\epsilon_0 J_{f0}\cos\theta}{(\sigma_1 + 2\sigma_2)\sigma_2}.$$

(1) 若 $\sigma_1 \gg \sigma_2$（良导体球）：则 $\boldsymbol{J}_{\text{in}} \approx 3\boldsymbol{J}_{f0}$，电流向球内集中。

(2) 若 $\sigma_2 \gg \sigma_1$（绝缘球）：则 $\boldsymbol{J}_{\text{in}} \approx 0$，电流绕过小球。

8. 半径为 R_0 的导体球外充满均匀绝缘介质 ϵ，导体球接地，离球心 a 处 $(a > R_0)$ 置一点电荷 Q_f. 试用分离变数法求空间各点电势，证明所得结果与镜像法结果相同.

证明:

(1) 分离变数法:

球外电势分解为:

$$\phi = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon R} + \phi'$$

其中 ϕ' 是感应电荷产生的电势。

在 $R_0 < r < a$ 区域，展开为:

$$\phi = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_l}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

由 $r = R_0$ 时 $\phi = 0$ 的边界条件得:

$$B_l = -\frac{R_0^{2l+1}}{a^l}\frac{Q_f}{4\pi\epsilon a}$$

(2) 镜像法:

像电荷电量和位置为:

$$Q' = -\frac{R_0}{a}Q_f, \quad r_0 = \frac{R_0^2}{a}$$

空间电势为:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon}\left[\frac{Q_f}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}} + \frac{Q'}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}}\right]$$

将此式按勒让德级数展开，结果与分离变数法完全一致。

9. 接地的空心导体球内外半径为 R_1 和 R_2，在球内离球心 a $(a < R_1)$ 处点电荷 Q，用镜像法求电势. 感应电荷有多少? 分布在内表面还是外表面?

解:

由于球壳接地，导体内及球外电势恒为 0。球内电势只需满足在 $r = R_1$ 处为 0。

利用镜像法，设置像电荷:

$$Q' = -\frac{R_1}{a}Q, \quad r_0 = \frac{R_1^2}{a}$$

球内电势（$r < R_1$）为:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}} - \frac{QR_1/a}{\sqrt{r^2 + \frac{R_1^4}{a^2} - \frac{2R_1^2 r}{a}\cos\theta}}\right]$$

感应电荷总量为 $-Q$，全部归于内表面，外表面无感应电荷。

10. 上题导体球壳不接地，而是带总电荷 Q_0（或电势 ϕ_0），或使其有确定电势 φ_0，试求这两种情况的电势. 又问 ϕ_0 与 Q_0 满足何种关系时，两种情况的解是相等的?

解:

球壳是等势体。球内电势由点电荷 Q、像电荷 Q' 以及球壳整体贡献的附加电势叠加而成。

球壳整体电势为:

$$\phi_{shell} = \frac{Q+Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

(1) 已知 Q_0 时，球内（$r < R_1$）电势为:

$$\phi = \phi_{image} + \frac{Q+Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_2} - \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

(2) 球外（$r > R_2$）由高斯定理得:

$$\phi_{\text{out}} = \frac{Q+Q_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

当 $\phi_0 = \dfrac{Q+Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_2}$ 时，两种情况的解相同。

11. 接地导体平面上有一半径为 a 的半球凸部，半球的球心在导体平面上，点电荷 Q 位于对称轴上，并与平面相距为 b $(b > a)$ 处，试用电像法求空间电势.

解:

本系统需要构造三个镜像电荷来满足导体平面和半球面电势为 0 的边界条件:

(1) 关于球面的镜像: $Q_1 = -\dfrac{a}{b}Q$，位于 $r_1 = \dfrac{a^2}{b}$;

(2) 关于平面的镜像: $Q_3 = -Q$，位于 $r_3 = -b$;

(3) 镜像电荷 Q_1 关于平面的镜像: $Q_2 = \dfrac{a}{b}Q$，位于 $r_2 = -\dfrac{a^2}{b}$。

空间电势为这四个电荷（含原电荷）产生电势的叠加。

12. 有一点电荷 Q 位于两个互相垂直的接地导体平面围成的直角空间内，到两平面距离为 a 和 b，求空间电势.

解:

利用镜像法，在四个象限分别放置电荷:

(1) 第一象限: 原电荷 Q，坐标 (a, b, z_0);

(2) 第二象限: 镜像电荷 $-Q$，坐标 $(-a, b, z_0)$;

(3) 第四象限：镜像电荷 $-Q$，坐标 $(a,-b,z_0)$；

(4) 第三象限：镜像电荷 Q，坐标 $(-a,-b,z_0)$。

空间电势为：

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{4}\frac{q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|}$$

该解满足 $y=0$ 和 $z=0$ 平面上电势为 0 的边界条件。

13. 设有两平面围成的直角形无穷容器，其内充满电导率为 σ 的液体. 取两平面为 xz 面和 yz 面，在 (x_0,y_0,z_0) 和 $(x_0,y_0,-z_0)$ 两点分别置正负电极并通以电流 I，求导电液体中的电势.

解:

在恒定电流场中，可以类比静电场处理。在 A 点 (x_0,y_0,z_0) 注入电流 I，对应有效电荷 $Q=\frac{I\epsilon}{\sigma}$；在 B 点 $(x_0,y_0,-z_0)$ 抽出电流 I，对应电荷 $-Q=-\frac{I\epsilon}{\sigma}$。

由于容器壁（$x=0$ 和 $y=0$）满足 $\boldsymbol{j}_n=0$，即 $\boldsymbol{E}_n=0$，这要求在该边界上电势的法向导数为零。

通过镜像法，需在四个象限对称放置 8 个点电荷（A 点 4 个，B 点 4 个）以满足边界条件：

(1) 对于 A 点，在 $(x_0,y_0,z_0),(-x_0,y_0,z_0),(x_0,-y_0,z_0),(-x_0,-y_0,z_0)$ 各放置一个 $+Q$；

(2) 对于 B 点，在对应的 $z=-z_0$ 平面位置各放置一个 $-Q$。

最终电势为这 8 个点电荷产生电势的叠加：

$$\phi(x,y,z) = \frac{I}{4\pi\sigma}\sum_{i=1}^{8}\frac{\pm 1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|}$$

14. 画出函数 $\frac{\mathrm{d}\delta(x)}{\mathrm{d}x}$ 的图，说明 $\rho=-(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\delta(\boldsymbol{r})$ 是一个位于原点的偶极子的电荷密度.

解:

$\delta(x)$ 在 $x=0$ 处无穷大，其他地方为 0。其微商定义为：

$$\frac{\mathrm{d}\delta(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\delta(x+\Delta x)-\delta(x)}{\Delta x}$$

性质：

(1) 当 $x\neq 0$ 时，$\frac{\mathrm{d}\delta(x)}{\mathrm{d}x}=0$；

(2) 当 $x \to 0^-$ 时，函数趋向 $+\infty$；当 $x \to 0^+$ 时，函数趋向 $-\infty$。

图像表现为在原点左侧极窄的无限正脉冲和右侧极窄的无限负脉冲的叠加，这恰好描述了两个相距极近、电量无限大的异号点电荷组成的系统，即位于原点的点偶极子。

15. 证明:

(1) $\delta(ax) = \dfrac{1}{a}\delta(x)$,（$a > 0$）（若 $a < 0$，结果如何?）;

(2) $x\delta(x) = 0$.

证明:

(1) 可以证明 $\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|}\delta(x)$:

根据 $\delta[g(x)] = \sum_k \dfrac{\delta(x - x_k)}{|g'(x_k)|}$，其中 $g(x) = ax$ 只有一个零点 $x_1 = 0$，且 $g'(0) = a$。

因此:

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

(2) 证明 $x\delta(x) = 0$:

对于任意良函数 $f(x)$，有

$$\int f(x)[x\delta(x)]\mathrm{d}x = [xf(x)]\Big|_{x=0} = 0$$

根据 δ 函数的定义，得

$$x\delta(x) = 0$$

16. 一块极化介质的极化矢量为 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')$，根据偶极子静电势的公式，极化介质所产生的静电势为

$$\varphi = \int_V \frac{\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\mathrm{d}V'$$

另外，根据极化电荷公式 $\rho_P = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$ 及 $\omega_P = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}$，极化介质产生的电势又可表示为

$$\varphi = -\int_V \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{P}}{4\pi\epsilon_0 r}\mathrm{d}V' + \oint_S \frac{\boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}'}{4\pi\epsilon_0 r}$$

证明以上两表达式是相同的.

证明:

利用恒等式:

$$\boldsymbol{P} \cdot \nabla' \frac{1}{r} = \nabla' \cdot \left(\frac{\boldsymbol{P}}{r}\right) - \frac{1}{r}\nabla' \cdot \boldsymbol{P}$$

由于 $\nabla'\frac{1}{r}=\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$，代入第一式：

$$\phi=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \boldsymbol{P}\cdot\nabla'\frac{1}{r}\mathrm{d}V'=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_V \nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{P}}{r}\right)\mathrm{d}V'-\int_V \frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}}{r}\mathrm{d}V'\right]$$

应用高斯定理将第一项体积分转为面积分：

$$\int_V \nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{P}}{r}\right)\mathrm{d}V'=\oint_S \frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}}{r}\mathrm{d}S'$$

即得证两式等同：

$$\phi=\int_V \frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\mathrm{d}V'=-\int_V \frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{P}}{4\pi\epsilon_0 r}\mathrm{d}V'+\oint_S \frac{\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'}{4\pi\epsilon_0 r}$$

17. 证明下述结果，并熟悉面电荷和面偶极层两侧电势和电场的变化.

(1) 在面电荷两侧，电势连续但法向微商有跃变；

(2) 在面偶极层两侧，电势有跃变

$$\phi_2-\phi_1=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}}{\epsilon_0}$$

但电势的法向微商是连续的.

证明：

(1) 面电荷两侧：电势连续但法向微商有跃变

面电荷密度为 σ。取跨越表面的扁盒做高斯面，得：

$$E_{2n}-E_{1n}=\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

由于 $\boldsymbol{E}=-\nabla\phi$，则：

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n}-\frac{\partial\phi_2}{\partial n}=\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

存在跃变。电势 ϕ 为场强的积分，在跨越面时积分路径趋于零，故电势连续。

(2) 面偶极层两侧：电势有跃变但法向微商连续

面偶极层由两层等量异号面电荷 $\pm\sigma$ 组成，间距 $l\to 0$。层内场强 $E=\frac{\sigma}{\epsilon_0}$。

电势差：

$$\phi_2-\phi_1=\int \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\lim_{l\to 0}\frac{\sigma}{\epsilon_0}l=\frac{P}{\epsilon_0}$$

而在偶极层外，正负电荷产生的电场抵消，故法向微商（场强）连续。

18. 一半径为 R_0 的球面, 在球坐标 $0 < \theta < \pi/2$ 的半球面上电势为 ϕ_0, 在 $\pi/2 < \theta < \pi$ 的半球面上电势为 $-\phi_0$，求空间各点电势.

解:

这是一个具有球对称性的拉普拉斯方程定解问题。球内通解为:

$$\phi = \sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

利用边界条件 $f(\theta)$ 进行勒让德展开，系数为:

$$A_l R_0^l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)\mathrm{d}x$$

由于 $f(x)$ 是奇函数，当 l 为偶数时 $A_l = 0$。
当 l 为奇数时，利用提示公式计算得:

$$A_l = \frac{\phi_0}{R_0^l}(-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{(l-2)!!}{(l+1)!!}(2l+1)$$

最终空间电势为:
球内（$r < R_0$）:

$$\phi = \sum_{l=1,3,\dots} A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

球外（$r > R_0$）:

$$\phi = \sum_{l=1,3,\dots} \frac{A_l R_0^{2l+1}}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

19. 上题能用格林函数方法求解吗? 结果如何?

解:

可以使用格林函数方法求解. 对于球面边界条件，适用的格林函数为满足

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

且 G 在球面 $r = R_0$ 上满足 $G(R_0, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = 0$ 的函数.