

星系巡天宇宙学

Galaxy Survey Cosmology

Hannu Kurki-Suonio

2025 年 2 月 24 日

目录

1 密度场的统计量	1
1.1 遍历性、统计均匀性与统计各向同性	1
1.2 密度两点自相关函数	3
1.3 有限巡天与积分约束	4
1.4 傅里叶展开	7
1.5 傅里叶变换	9
1.6 功率谱	11
1.6.1 有限巡天的功率谱	13
1.7 贝塞尔函数	15
1.8 球贝塞尔函数	16
1.9 幂律谱	17
1.10 所关注的尺度与窗函数	20
2 星系分布	26
2.1 星系的平均数密度	26
2.2 星系两点相关函数	28
2.3 泊松分布	28
2.4 元胞计数	33
2.5 离散天体集合的傅里叶变换	33
2.5.1 再论泊松分布	34
3 低维子空间	36
3.1 一维截线	36
3.2 切片	38
4 小角度下的角相关函数	39
4.1 与三维相关函数的关系	39
4.1.1 选择函数	41
4.1.2 小角度极限	42
4.1.3 幂律	43
4.2 平坦天空的功率谱	44
4.2.1 与三维功率谱的关系	45
5 球面天空	45
5.1 角相关函数与角功率谱	46
5.2 勒让德多项式	47
5.3 球谐函数	48
5.4 欧拉角	50
5.5 Wigner D 函数	50
5.6 与三维功率谱的关系	53

6 动力学	54
6.1 线性微扰论	54
6.2 Zel'dovich 近似	58
6.3 非线性增长	59
6.4 维里化	62
7 红移空间	62
7.1 作为实空间畸变的红移空间	63
7.2 线性扰动与功率谱	64
7.3 相关函数	65
7.3.1 线性增长模	66
7.3.2 投影相关函数	70
7.4 小尺度	71
7.5 Friedmann–Robertson–Walker 宇宙中的红移空间	71
7.6 Alcock–Paczynski 效应	73
8 相关函数的测量	77
8.1 不同估计量的偏差与方差	79
8.1.1 $\langle DD \cdot DD \rangle$ 、 $\langle DR \cdot DR \rangle$ 与 $\langle DD \cdot DR \rangle$ 的推导	80
8.1.2 弱相关极限	83
8.1.3 偏差	84
8.1.4 弱相关极限下的方差	84
9 功率谱估计	88
9.1 散粒噪声	88
9.2 掩膜	89
9.3 选择函数	92
9.4 权重	92
10 作为标准尺的重子声学振荡尺度	93
11 高阶统计量	97
11.1 N 点相关函数与 $(N - 1)$ 阶谱	97
11.2 三点相关函数与双谱	98
11.3 三点相关函数的测量	100
11.4 宇宙学中的高阶统计量	101
11.5 星系巡天的结果	101
12 星系巡天	101
12.1 历史巡天	101
12.1.1 星云表	102
12.1.2 二维巡天	102
12.1.3 红移巡天	103
12.1.4 弱引力透镜巡天	107
12.2 斯隆数字巡天	109

12.2.1	SDSS-I	110
12.2.2	SDSS-II	110
12.2.3	SDSS-III	110
12.2.4	SDSS-IV	110
12.3	Euclid	110
12.4	地面巡天	116
12.4.1	LSST	116
12.4.2	北天巡天	118
12.4.3	DESI	119
12.5	Roman	121
12.6	暗能量巡天的阶段划分	122
12.7	光学扩展量	122
标准译名索引		124

前言

这是我于 2017 年春季在 University of Helsinki 讲授的“星系巡天宇宙学”课程第一部分 (GSC1) 的讲义。课程的第二部分讨论引力透镜，重点是弱引力透镜与宇宙剪切。第二部分 (GSC2) 的讲义以 Schneider 在 Schneider、Kochanek 和 Wambsganss 合著的教科书 *Gravitational Lensing: Strong, Weak and Micro* (Springer, 2006) 中的讲授内容为基础，目前只有手写版本。这是我第一次讲授这门课程，因此讲义还略显粗糙。今后我希望增加更多关于星系巡天实际工作及其宇宙学结果的内容。

— Hannu Kurki-Suonio, 2017 年 5 月

2019 年版前言

当前版本的讲义没有引言，而是直接进入相关函数和功率谱的数学表述；它们是星系巡天宇宙学的主要工具。关于这一领域的四页入门介绍，请阅读文献 [2] 第 2.7 节。我也在第一堂课上作了一个不同的导论。讲义中的计算量可能会让一些同学感到望而生畏。我力求内容完整，使这些讲义可以作为查阅所需结果的参考，但同学们不必掌握其中所有的数学结果。今年我增添了一些新内容，包括近期的观测结果；相应地，讲义中的部分旧内容（第 3 节及第 5 节的后半部分）没有在本次课程中讲授。

— Hannu Kurki-Suonio, 2019 年 2 月

2021 年版前言

这些讲义将随着课程的推进而更新。当前版本基本沿用 2019 年课程结束时的内容，只修正了一些排印错误和其他错误。感谢 Elina Keihänen 找出了其中的一部分。

— Hannu Kurki-Suonio, 2021 年 1 月

2023 年版前言

2023 年，这门课程被拆分为两门。第一部分成为一门课时较短的新课程“星系巡天宇宙学”，本讲义即用于这门课。第二部分成为由 Elina Keihänen 讲授的“引力透镜”课程。

— Hannu Kurki-Suonio, 2023 年 1 月

1 密度场的统计量

我们首先讨论欧几里得 d 维空间中密度场 $\rho(\mathbf{x})$ 的统计量。先作一般性的处理，不具体限定所讨论的是哪一种密度。它可以是星系等天体的数密度（这将是我们的主要应用），也可以只是质量密度；不过，目前我们将 $\rho(\mathbf{x})$ 视为连续量。

在 d 维空间中，与径向距离 r 至 $r + dr$ 对应的体积元为¹

$$dV = C_d r^{d-1} dr, \quad \text{其中 } C_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (1.1)$$

距离 R 以内的体积为

$$V(R) = \frac{C_d}{d} R^d. \quad (1.2)$$

我们将用到 $d = 1, 2, 3$ 的情形，此时

$$C_1 = 2, \quad C_2 = 2\pi, \quad C_3 = 4\pi. \quad (1.3)$$

主要应用是 $d = 3$ （三维），而 $d = 1$ （一维）例如对应铅笔束巡天：对天空中的一个小视场作长时间曝光，测定这一视线方向上大量星系的距离（红移）。主要的二维应用是在将天空近似为平面时，研究没有距离测量的星系在天空中的分布；它也可以对应沿天空中某条大圆（例如赤道，见图 1）开展的红移巡天。

我们假设密度变化起源于一个满足统计各向同性、统计均匀性和遍历性的随机过程。我们真正感兴趣的是这一随机过程的统计性质，而非 $\rho(\mathbf{x})$ 某个特定实现的统计性质。

目前认为，我们所在宇宙²中的初始密度扰动，是在极早期宇宙的暴胀阶段由暴胀场的量子涨落产生的。在标准暴胀模型中，这一随机过程满足各向同性、均匀性和遍历性。此后，密度场在确定性的物理规律支配下演化至今，其各种统计量发生了变化，但这些基本性质保持不变。

我们遵循文献 [1, 2] 的处理。文献 [2] 第 2.7 节给出了这一领域的四页入门介绍，建议在此处先行阅读。

1.1 遍历性、统计均匀性与统计各向同性

统计性质通常定义为某些量的平均值。我们将涉及两类平均：体积平均（volume average）和系综平均（ensemble average）。³

体积平均适用于某个特定实现，以及该实现中的某个体积 V 。我们用上横线 $\bar{f}$ 表示量 $f(\mathbf{x})$ 的体积平均，其定义为

$$\bar{f} \equiv \frac{1}{V} \int_V d^d x f(\mathbf{x}). \quad (1.4)$$

系综平均针对随机过程而言。我们假设观测到的密度场，只是这一随机过程可能产生的无穷多个实现所构成的系综中的一个。了解这一随机过程，就是了解它所产生的量 γ 的概率分布 $\text{Prob}(\gamma)$ 。（此处用抽象符号 γ 表示这无穷多个量；它们可以是密度场在每个位置的值 $\rho(\mathbf{x})$ ，也可以是其傅里叶系数 $\rho_{\mathbf{k}}$ 。）若量 f 以 $f(\gamma)$ 的形式依赖于这些量，则其系综平均记作 $\langle f \rangle$ ，定义为如下可能是无穷维的积分：

$$\langle f \rangle \equiv \int d\gamma \text{Prob}(\gamma) f(\gamma). \quad (1.5)$$

¹这里 $\Gamma(x) = (x-1)!$ 是伽马函数，例如 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ 、 $\Gamma(1) = 1$ 、 $\Gamma(\frac{3}{2}) = \sqrt{\pi}/2$ 等。利用递推公式 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ，很容易得到其他函数值。

²原文中首字母大写的“Universe”指我们生活的宇宙；小写的“universe”则指理论概念，或我们所考虑的任意假想宇宙。

³这里重新讨论“宇宙学 II”第 8.1 节（2018 年版）的内容，但采用不同的方法。在“宇宙学 II”中，我们采用理论性的处理，假设体积 V 很大，从而有 $\bar{\rho} = \langle \rho \rangle$ 。现在， V 与星系巡天的体积相关，为了精确处理，必须考虑 $\bar{\rho} \neq \langle \rho \rangle$ 。

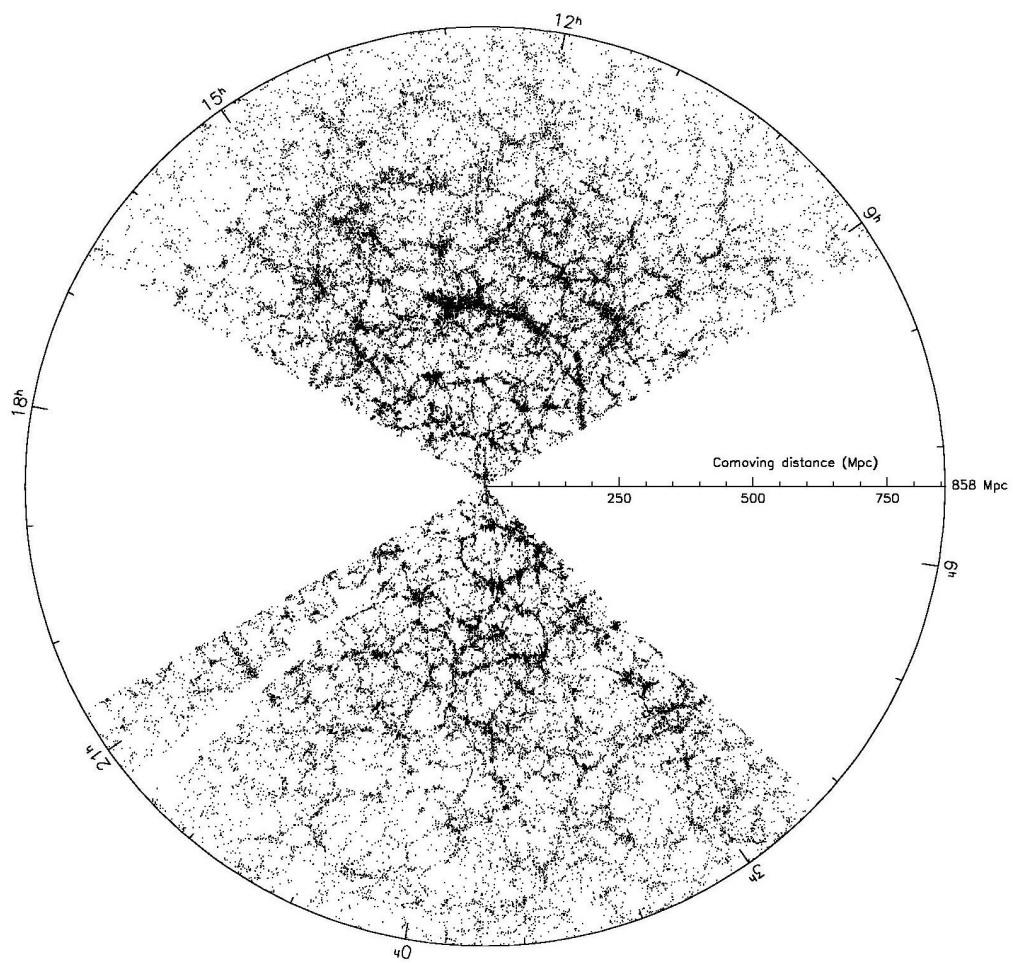


图 1: 斯隆数字巡天 (SDSS) 所给出的星系分布。图中显示距赤道不超过 2° 、距离小于 858 Mpc 的星系 (假设 $H_0 = 71 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$)。图片来自 astro-ph/0310571 [12]。

例如，这里的 f 可以是某个位置 $\mathbf{x}$ 处的密度 $\rho(\mathbf{x})$ 。系综平均也称为期望值。因此，系综代表一种概率分布；我们将讨论的密度场性质（例如下文的统计均匀性、统计各向同性和遍历性）都是这一系综的性质。

统计均匀性意味着期望值 $\langle f(\mathbf{x}) \rangle$ 在所有位置 $\mathbf{x}$ 都相同，因此可写为 $\langle f \rangle$ 。统计各向同性意味着，对涉及方向的量，其统计性质与方向无关。例如，对矢量 $\mathbf{v}$ ，所有方向必须等概率，由此可得 $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$ 。

如果理论性质是系综的性质，而我们只能观测到其中的一个实现（我们所在的宇宙），那么如何比较理论与观测？一个合理的设想是：比较足够大体积内不同部分所得到的统计性质，应当类似于同一部分在不同实现之间的统计性质，也就是说，前者应提供该概率分布的公平样本。这称为遍历性（ergodicity）。满足

$$\bar{f} \longrightarrow \langle f \rangle \quad \text{当} \quad V \longrightarrow \infty \quad (1.6)$$

的场 $f(\mathbf{x})$ 称为遍历场。我们假设密度场具有遍历性。可以证明，满足统计均匀性和各向同性的高斯随机过程具有遍历性⁴（不过，这里并不假设高斯性）。

由于采用了遍历性假设，文献中不一定始终明确区分体积平均与系综平均，往往直接使用 $\langle \cdot \rangle$ 而不说明是哪一种；但我们将区分这两个概念。⁵对于有限体积 V ， $\bar{f}$ 并不等于 $\langle f \rangle$ ，二者的差异称为样本方差（sample variance）或宇宙方差（cosmic variance）。体积越大，差异越小。宇宙学理论预言的是 $\langle f \rangle$ ，而观测探测的是有限体积内的 $\bar{f}$ ，因此宇宙方差限制了理论与观测比较的精度。

1.2 密度两点自相关函数

定义密度扰动场为

$$\delta(\mathbf{x}) \equiv \frac{\rho(\mathbf{x}) - \langle \rho \rangle}{\langle \rho \rangle}. \quad (1.7)$$

由于 $\rho \geq 0$ ，必有 $\delta \geq -1$ 。根据统计均匀性，

$$\langle \rho(\mathbf{x}) \rangle = \langle \rho \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \delta \rangle = 0. \quad (1.8)$$

因此不能用 $\langle \delta \rangle$ 衡量不均匀性。可以改用 δ 的平方，它处处非负，因而不会像 δ 那样在平均时相互抵消。其期望值 $\langle \delta^2 \rangle$ 是密度扰动的方差，而方差的平方根

$$\delta_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\langle \delta^2 \rangle} \quad (1.9)$$

称为均方根（rms）密度扰动，给出了任意位置处 δ 的典型预期绝对值。⁶它反映不均匀性的强弱，却不包含非均匀区域的形状或大小信息。为获得更多信息，我们引入相关函数 ξ 。

密度两点自相关函数（通常简称相关函数）定义为

$$\xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2) \rangle. \quad (1.10)$$

若预期 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 处的密度扰动同号，则它为正；若一处超密、另一处欠密，则它为负。因此，它探测不同位置处密度扰动之间的相关性。由于统计均匀性， $\xi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ 只能依赖于位置之差（间隔） $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ ，故重新定义

$$\xi(\mathbf{r}) \equiv \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle. \quad (1.11)$$

⁴Liddle 和 Lyth [7] 在第 73 页作出了这一陈述，但没有给出实际证明的出处。

⁵对复杂表达式， $\langle \cdot \rangle$ 比上横线更方便，因此有时用 $\langle \cdot \rangle_V$ 表示体积平均。

⁶换言之， δ_{rms} 是 $\rho/\langle \rho \rangle$ 的标准差。

由统计各向同性, $\xi(\mathbf{r})$ 与方向无关, 即具有球对称性 (这里把它作为任意 d 下的统称, 也可以说“各向同性”: $d = 2$ 时应理解为圆对称, $d = 1$ 时则为偶函数),

$$\xi(\mathbf{r}) = \xi(r). \quad (1.12)$$

当 r 小于典型超密或欠密区域的尺度时, 相关函数较大且为正; 间隔增大后, 它会变小。

零间隔处的相关函数给出密度扰动的方差:

$$\langle \delta^2 \rangle \equiv \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}) \rangle \equiv \xi(0). \quad (1.13)$$

将距离 R 以内 ξ 的体积平均定义为

$$\bar{\xi}(R) \equiv \frac{1}{V(R)} \int_0^R \xi(r) C_d r^{d-1} dr. \quad (1.14)$$

当 $d = 3$ 时,

$$\bar{\xi}(R) \equiv \frac{3}{R^3} \int_0^R \xi(r) r^2 dr \equiv \frac{3}{R^3} J_3(R), \quad (1.15)$$

其中

$$J_3(R) \equiv \int_0^R \xi(r) r^2 dr \quad (1.16)$$

称为“ J_3 积分” (不是贝塞尔函数; 关于 J_ℓ 和 K_ℓ 积分的更多内容见第 7.3.1 节)。

1.3 有限巡天与积分约束

超密必须由欠密来补偿, 正相关通常也会由负相关来补偿。我们将在第 1.6 节说明, 在一定假设下, 积分约束

$$\int d^d r \xi(r) = 0 \quad (1.17)$$

成立, 其中积分延伸至无穷远。小间隔 r 处的相关为正, 因此若只积到某个适中的有限最大间隔, 积分通常为负, 因为大间隔处的负相关被遗漏得更多。

现在考虑单个实现和有限体积 V , 此时很可能有 $\bar{\rho} \neq \langle \rho \rangle$ 。定义

$$\hat{\delta}(\mathbf{x}) \equiv \frac{\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}, \quad \hat{\xi}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{V(\mathbf{r})} \int_{V(\mathbf{r})} d^d x \hat{\delta}(\mathbf{x}) \hat{\delta}(\mathbf{x} + \mathbf{r}), \quad (1.18)$$

其中 $V(\mathbf{r}) \subset V$ 是 V 的一个子体积, 在其中, $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ 也位于 $V(\mathbf{r})$ 内。如果能够测定 V 内的密度场 $\rho(\mathbf{r})$, 就能计算 $\hat{\delta}(\mathbf{x})$ 和 $\hat{\xi}(\mathbf{r})$, 后者可作为从巡天体积 V 得到的 $\xi(\mathbf{r})$ 的估计。对于能够容纳在 V 内的所有间隔 $\mathbf{r}$, 都可得到估计。将这些 $\mathbf{r}$ 的集合记作 V_r 。容易证明 (练习)

$$\int_{V_r} d^d r \hat{\xi}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.19)$$

这就是有限巡天的积分约束。证明的关键是注意到, 对 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{x}$ 的二重积分恰好遍历 V 内的所有点对 $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, 其中 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, 即

$$\int_{V_r} d^d r \int_{V(\mathbf{r})} d^d x = \int_V d^d x \int_V d^d x'. \quad (1.20)$$

刚才我们指出, 如果在式 (1.19) 中用真实相关函数 $\xi(r)$ 代替观测相关函数 $\hat{\xi}(r)$, 预期积分应为正。因此 $\langle \hat{\xi}(r) \rangle \neq \xi(r)$, 说明估计量有偏。这并不意外: 若 $\bar{\rho} \neq \langle \rho \rangle$, 则 $\hat{\delta}(\mathbf{x}) \neq \delta(\mathbf{x})$, 二者既有缩放差异, 也有偏移:

$$\hat{\delta}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \rho \rangle}{\bar{\rho}} \delta(\mathbf{x}) + \frac{\langle \rho \rangle - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}. \quad (1.21)$$

由于这一偏移，在扰动较小时， $\widehat{\delta}(\mathbf{x})$ 和 $\delta(\mathbf{x})$ 甚至可能异号。

我们希望求出这一偏差，即 $\langle \widehat{\xi}(r) \rangle$ 与 $\xi(r)$ 之差。考虑 $\bar{\rho}$ 固定的子系综，用 $\langle \cdot \rangle'$ 表示其期望值。由 $\rho(\mathbf{x}) = \bar{\rho}[1 + \widehat{\delta}(\mathbf{x})]$ ，有

$$\begin{aligned} \langle \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle' &= \bar{\rho}^2 \langle [1 + \widehat{\delta}(\mathbf{x})][1 + \widehat{\delta}(\mathbf{x} + \mathbf{r})] \rangle' \\ &= \bar{\rho}^2 + \langle \widehat{\delta}(\mathbf{x}) \rangle' + \langle \widehat{\delta}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle' + \bar{\rho}^2 \langle \widehat{\delta}(\mathbf{x})\widehat{\delta}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle' \\ &\equiv \bar{\rho}^2[1 + 0 + 0 + \widetilde{\xi}(r)] \equiv \bar{\rho}^2 C_V[1 + \xi(r)], \end{aligned} \quad (1.22)$$

其中

$$\widetilde{\xi}(r) \equiv \langle \widehat{\delta}(\mathbf{x})\widehat{\delta}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle', \quad (1.23)$$

于是 $\widetilde{\xi}(r) = \langle \widehat{\xi}(r) \rangle'$ 。这里作了一个假设： $1 + \widetilde{\xi}(r)$ 与 $1 + \xi(r)$ 之间只相差一个常数偏差因子，将其记为 C_V 。

现在可以用两种方式计算 $\langle \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle'$ 的二重积分：

$$\begin{aligned} \int_{V_r} d^d r \int_{V(\mathbf{r})} d^d x \langle \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle' &= \int_V d^d x \int_V d^d x' \langle \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \rangle' \\ &= \left\langle \int_V d^d x \rho(\mathbf{x}) \int_V d^d x' \rho(\mathbf{x}') \right\rangle' \\ &= \langle V \bar{\rho} V \bar{\rho} \rangle' = V^2 \bar{\rho}^2, \end{aligned} \quad (1.24)$$

以及

$$\begin{aligned} \int_{V_r} d^d r \int_{V(\mathbf{r})} d^d x \langle \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle' &= \bar{\rho}^2 C_V \int_{V_r} d^d r \int_{V(\mathbf{r})} d^d x [1 + \xi(r)] \\ &\equiv \bar{\rho}^2 C_V V^2 (1 + \xi_V), \end{aligned} \quad (1.25)$$

其中定义了

$$\begin{aligned} 1 + \xi_V &\equiv \frac{1}{V^2} \int_{V_r} d^d r \int_{V(\mathbf{r})} d^d x [1 + \xi(r)] \\ &= \frac{1}{V^2} \int_V d^d x \int_V d^d x' [1 + \xi(\mathbf{x}' - \mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (1.26)$$

也就是说， ξ_V 是巡天体积内所有点对的真实相关的平均。比较式 (1.24) 与 (1.25)，得到 $C_V = 1/(1 + \xi_V)$ ，即

$$1 + \langle \widehat{\xi}(r) \rangle = \frac{1 + \xi(r)}{1 + \xi_V}. \quad (1.27)$$

结果与 $\bar{\rho}$ 无关，因此这里用 $\langle \cdot \rangle$ 代替了 $\langle \cdot \rangle'$ 。

通常 ξ_V 为正，因为有限巡天体积更容易遗漏负相关，而非正相关，前者出现在大间隔处。当巡天体积足够大时， $\xi_V \ll 1$ ，于是可近似为

$$1 + \langle \widehat{\xi}(r) \rangle \approx (1 - \xi_V)[1 + \xi(r)] = 1 + \xi(r) - \xi_V - \xi_V \xi(r). \quad (1.28)$$

对于大间隔， $|\xi(r)| \ll 1$ ，还可进一步近似为

$$\langle \widehat{\xi}(r) \rangle \approx \xi(r) - \xi_V, \quad (1.29)$$

即预期会出现一个恒定的向下偏移。

这种偏差称为积分约束效应。其原因是，积分约束迫使所估计的相关函数在巡天体积内平均为零，尽管真实相关在该体积内可能尚未平均到零。这个效应似乎与使用巡天平均密度 $\bar{\rho}$ 、而非“真实”平均密度 $\langle \rho \rangle$ 定义密度扰动有关；后者是系综平均，根据遍历性也等于无穷体积的平均密度。然

而，情形更为微妙，因为推导出的 $C_V = 1/(1 + \xi_V)$ 与 $\bar{\rho}$ 无关：无论 $\bar{\rho} < \langle \rho \rangle$ 还是 $\bar{\rho} > \langle \rho \rangle$ ，甚至碰巧 $\bar{\rho} = \langle \rho \rangle$ ，都会得到相同的偏差。

注意， $\langle \bar{\rho} \rangle = \langle \rho \rangle$ ，但 $\langle \bar{\rho}^2 \rangle \neq \langle \rho \rangle^2$ ：

$$\begin{aligned}\bar{\rho}^2 &= \left[\frac{1}{V} \int d^d x \rho(\mathbf{x}) \right]^2 = \frac{\langle \rho \rangle^2}{V^2} \int d^d x [1 + \delta(\mathbf{x})] \int d^d x' [1 + \delta(\mathbf{x}')] \\ &= \langle \rho \rangle^2 + \frac{\langle \rho \rangle^2}{V} \left[\int d^d x \delta(\mathbf{x}) + \int d^d x' \delta(\mathbf{x}') \right] \\ &\quad + \frac{\langle \rho \rangle^2}{V^2} \int d^d x d^d x' \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}'),\end{aligned}\tag{1.30}$$

从而

$$\langle \bar{\rho}^2 \rangle = \langle \rho \rangle^2 + \frac{\langle \rho \rangle^2}{V^2} \int d^d x d^d x' \xi(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = \langle \rho \rangle^2 [1 + \xi_V].\tag{1.31}$$

在生成许多实现的模拟中可以看到这种偏差（单个实现的结果可能噪声太大，难以辨认）。若所有实现具有相同的 $\bar{\rho}$ ，或者允许不同实现的 $\bar{\rho}$ 改变、但每个实现的 $\hat{\delta}(\mathbf{x})$ 都相对于该实现自身的 $\bar{\rho}$ 定义，就会看到 $1/(1 + \xi_V)$ 的偏差。然而，若允许 $\bar{\rho}$ 在实现之间变化，并且每个实现的 $\delta(\mathbf{x})$ 都相对于所有实现的平均 $\bar{\rho}$ 定义，就看不到这一偏差，因为后一种情形模拟的是宇宙的系综，而 $\delta(\mathbf{x})$ 表示相对于系综平均的偏离。（这里实际提到的模拟使用的是代表星系的离散点集，而非连续密度场。第 2 节将引入离散点，即星系的分布，第 8 节将讨论这种情况下的积分约束。）

积分约束偏差的另一种推导。 上述推导与文献 [39, 15] 中的标准推导类似。但我并不满意，因为它没有说明为什么可以假设偏差因子 C_V 是与 r 无关的常数。因此，下面给出另一种推导。

考虑完整系综，即不把 $\bar{\rho}$ 限制在固定值。现在有

$$\langle \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \langle \rho \rangle^2 \langle [1 + \delta(\mathbf{x})][1 + \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r})] \rangle = \langle \rho \rangle^2 [1 + \xi(r)].\tag{1.32}$$

另一方面，对每个实现定义 $\hat{\delta}(\mathbf{x}) \equiv [\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}]/\bar{\rho}$ ，则也有

$$\begin{aligned}\langle \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle &= \langle \bar{\rho}^2 [1 + \hat{\delta}(\mathbf{x})][1 + \hat{\delta}(\mathbf{x} + \mathbf{r})] \rangle \\ &= \langle \bar{\rho}^2 \rangle + \langle \bar{\rho}^2 \hat{\delta}(\mathbf{x}) \rangle + \langle \bar{\rho}^2 \hat{\delta}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle + \langle \bar{\rho}^2 \hat{\delta}(\mathbf{x}) \hat{\delta}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle.\end{aligned}\tag{1.33}$$

中间两项为零，因为对于 $\bar{\rho}$ 固定的子系综， $\langle \bar{\rho}^2 \hat{\delta}(\mathbf{x}) \rangle' = \bar{\rho}^2 \langle \hat{\delta}(\mathbf{x}) \rangle' = 0$ ；再按 $\bar{\rho}$ 的分布对这些零取平均，结果仍是零。若进一步假设 $\bar{\rho}^2$ 与 $\hat{\delta}(\mathbf{x}) \hat{\delta}(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ 不相关，从而

$$\begin{aligned}\langle \bar{\rho}^2 \hat{\delta}(\mathbf{x}) \hat{\delta}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle &= \langle \bar{\rho}^2 \rangle \langle \hat{\delta}(\mathbf{x}) \hat{\delta}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \\ &= \langle \rho \rangle^2 [1 + \xi_V] \langle \hat{\xi}(r) \rangle,\end{aligned}\tag{1.34}$$

便得到

$$\langle \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \langle \rho \rangle^2 [1 + \xi(r)] = \langle \rho \rangle^2 [1 + \xi_V] [1 + \langle \hat{\xi}(r) \rangle].\tag{1.35}$$

因此，用另一个假设替换原先的假设，仍得到相同的结果。

练习：单个实现的积分约束。 对于单个实现和有限体积（因此 $\bar{\rho} \neq \langle \rho \rangle$ ），可以定义

$$\hat{\delta}(\mathbf{x}) \equiv \frac{\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}, \quad \hat{\xi}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{V} \int_V d^d x \hat{\delta}(\mathbf{x}) \hat{\delta}(\mathbf{x} + \mathbf{r}).\tag{1.36}$$

1. 理论处理：假设周期边界条件。这使 $\hat{\xi}(\mathbf{r})$ 也具有周期性。所有积分，包括式 (1.37)，均在体积 V 上进行。证明

$$\int_V d^d r \hat{\xi}(\mathbf{r}) = 0.\tag{1.37}$$

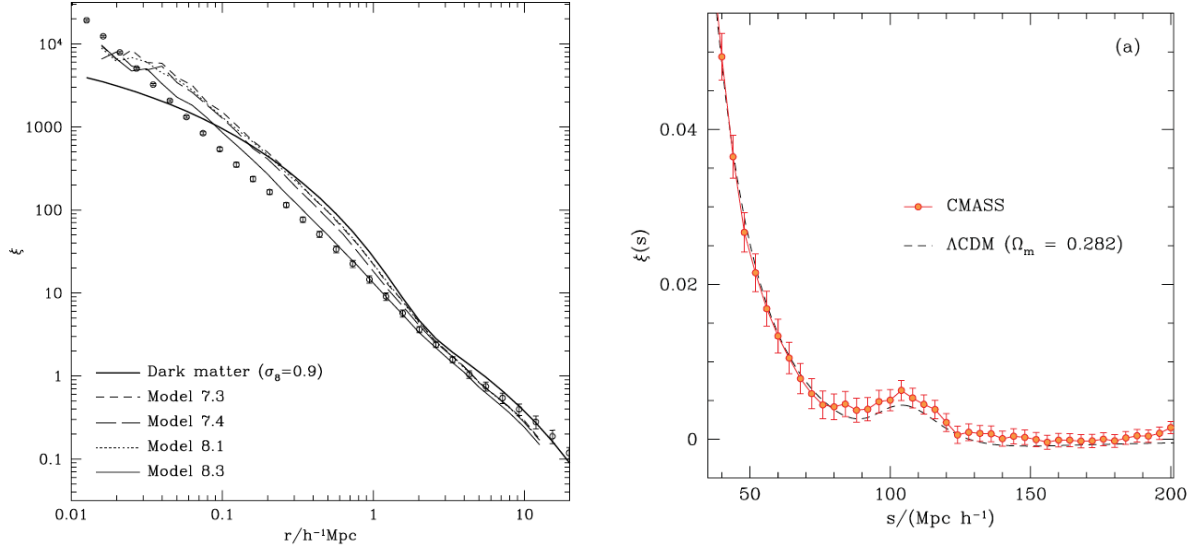


图 2: 星系巡天的两点相关函数 $\xi(r)$ 。左图: 以双对数坐标展示小尺度。带误差棒的圆点为 APM 星系巡天的观测测量 [4], 不同曲线为文献 [5] 的理论预言 (取自该文图 9)。右图: 以线性坐标展示大尺度。带误差棒的红色圆点为重子振荡光谱巡天 (BOSS) CMASS 第九次数据发布 (DR9) 样本的观测测量, 虚线为 Λ CDM 模型的理论预言。100 h^{-1} Mpc 附近的隆起是第 10 节将讨论的重子声学振荡 (BAO) 峰。右图取自文献 [6] 图 2a。

这就是积分约束。因此, 小间隔处 $\hat{\xi}$ 的正值必须由更大 r 处的负值补偿。注意, 这里不需要任何统计假设, 例如统计均匀性或遍历性。若在大 r 处 $\hat{\xi}(r) \rightarrow 0$ 足够快, 则对于大体积, 边界条件并不重要。

2. 实际处理: 为了避免使用边界条件, 也避免涉及体积之外的区域, 重新定义

$$\hat{\xi}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{V(\mathbf{r})} \int_{V(\mathbf{r})} d^d x \hat{\delta}(\mathbf{x}) \hat{\delta}(\mathbf{x} + \mathbf{r}), \quad (1.38)$$

使每个 $\mathbf{r}$ 对应的积分, 只遍历 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x} + \mathbf{v}$ 都在体积内的那些 $\mathbf{x}$ 。这正是真实星系巡天中的做法。证明

$$\int_{V_r} d^d r \hat{\xi}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.39)$$

其中积分遍历由式 (1.38) 定义了 $\hat{\xi}(\mathbf{r})$ 的那些 $\mathbf{r}$, 也就是说, $\mathbf{r}$ 是体积内两点之间的间隔。

1.4 傅里叶展开

傅里叶分析是一种分离不同距离尺度的方法, 使物理过程对距离尺度的依赖变得清晰、易于处理。

为对密度场进行傅里叶分析, 我们考虑一个立方体体积 $V = L^d$, 并假设周期边界条件。这并不意味着真实密度场必须具有周期性; 我们只关心该体积内的密度场, 因此可以用这一体积的周期性复制替代体积之外的部分。这会在体积边界处引入不连续性。展开式 (1.40) 本身对 V 外的 $f(\mathbf{x})$ 不作任何假设: 在 V 内展开是正确的, 而在 V 外, 它表示上述周期延拓; 边界不连续意味着展开将包含高 k 模。但下文的一些讨论, 例如与窗函数的卷积 (第 1.10 节), 会用到这种周期性。在体积边界附近, 窗函数将延伸到体积之外; 由于真实宇宙不具有周期性, 这实际上会引入边缘效应。我

们必须将其与实际巡天并不恰好覆盖立方体体积这一事实一起处理（第 9.2 节）。在理论工作中，也可以令 V 远大于可观测宇宙，使边界足够遥远，从而不产生影响。

现在可以把任意空间函数 $f(\mathbf{x})$ 展开为傅里叶级数：

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (1.40)$$

其中波矢 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$ 的分量取值为

$$k_i = n_i \frac{2\pi}{L}, \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.41)$$

（注意，我们采用文献 [2] 的傅里叶约定，而非文献 [1] 的约定。）傅里叶系数 $f_{\mathbf{k}}$ 为

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{1}{V} \int_V f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^d x. \quad (1.42)$$

$\mathbf{k} = 0$ 的项给出平均值：

$$f_0 = \bar{f}. \quad (1.43)$$

尽管我们处理的是实数量⁷ $f(\mathbf{x})$ ，傅里叶系数仍是复数。由实性 $f(\mathbf{x})^* = f(\mathbf{x})$ 可得

$$f_{-\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}}^*. \quad (1.44)$$

因此，傅里叶模成对出现：

$$f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + f_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = 2 \operatorname{Re} f_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) - 2 \operatorname{Im} f_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (1.45)$$

每一项都只留下实部 $\operatorname{Re} f_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) - \operatorname{Im} f_{\mathbf{k}} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ 。因此，要直观理解一个傅里叶模，只需想象这一实部，它是一个正弦平面波。傅里叶系数的大小依赖于体积 V ：增大 V 通常会使 $f_{\mathbf{k}}$ 变小，以补偿傅里叶空间中更密集的 $\mathbf{k}$ 采样。

傅里叶展开是以平面波 $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ 为基的展开。这些平面波在欧几里得体积 V 中构成一个正交、完备（闭合）的函数集。（后面还会遇到以其他函数为基的展开。）因此，它们满足正交关系

$$\int dV (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}})^* e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} = \int dV e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} = V \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (1.46)$$

其中 $\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ 是克罗内克 δ ：当 $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ 时为 1，否则为 0。它们还满足闭合（完备性）关系

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}})^* e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} = \delta_D^d(\mathbf{x}' - \mathbf{x}), \quad (1.47)$$

其中 $\delta_D^d(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$ 是 d 维狄拉克 δ 函数。⁸ 不要将狄拉克或克罗内克 δ 与密度扰动 $\delta(\mathbf{x})$ 及其傅里叶系数 $\delta_{\mathbf{k}}$ 混淆！因此，函数集

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right\} \quad (1.49)$$

是标准正交集。

⁷在“引力透镜”课程中会引入复剪切，因此这些实性条件不适用于其傅里叶系数或傅里叶变换。

⁸狄拉克 δ 函数并非真正的函数，而是一种算符（准确的数学术语是“分布”）；它通过在积分中对函数 $f(\mathbf{x})$ 的作用来定义：

$$\int_V \delta_D^d(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) f(\mathbf{x}') d^d x \equiv f(\mathbf{x}). \quad (1.48)$$

可将其想象为一族函数的极限：这些函数只在非常靠近零的位置取很大的值，其他地方接近零，且归一化后积分为 1。

正交函数的完备性关系⁹的意义在于，任意函数确实都能用它们展开。在这里，

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \int_V d^d x' f(\mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \int d^d x' f(\mathbf{x}') \delta_D^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = f(\mathbf{x}).\end{aligned}\quad (1.50)$$

卷积定理指出，坐标空间中的卷积在傅里叶空间中变为简单的乘法（练习）：

$$\begin{aligned}(f * g)(\mathbf{x}) &\equiv \int_V d^d x' f(\mathbf{x}') g(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= \int_V d^d x' f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') g(\mathbf{x}') = V \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},\end{aligned}\quad (1.51)$$

而坐标空间中的乘法变为傅里叶空间中的卷积（练习）：

$$\frac{1}{V} \int_V f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^d x = \sum_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}} g_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}. \quad (1.52)$$

Plancherel 公式为（练习）

$$\frac{1}{V} \int_V d^d x f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}^* g_{\mathbf{k}}. \quad (1.53)$$

取 $g = f$ ，即得到 Parseval 公式：

$$\frac{1}{V} \int_V d^d x f(\mathbf{x})^2 = \sum_{\mathbf{k}} |f_{\mathbf{k}}|^2. \quad (1.54)$$

傅里叶分析的一大优点是能以乘法替代求导：

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \equiv \nabla f(\mathbf{x}) = \nabla \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}} i\mathbf{k} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \Rightarrow \mathbf{g}_{\mathbf{k}} = i\mathbf{k} f_{\mathbf{k}}. \quad (1.55)$$

1.5 傅里叶变换

相邻 k_i 值的间隔为 $\Delta k_i = 2\pi/L$ ，因此可以写成

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \Delta k_1 \cdots \Delta k_d \approx \frac{1}{(2\pi)^d} \int f(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^d k, \quad (1.56)$$

其中

$$f(\mathbf{k}) \equiv L^d f_{\mathbf{k}}. \quad (1.57)$$

这样就用傅里叶积分替代了傅里叶级数。

在 $V \rightarrow \infty$ 的极限下，式 (1.56) 中的近似成为精确等式，得到傅里叶变换对

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int f(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^d k, \\ f(\mathbf{k}) &= \int f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^d x.\end{aligned}\quad (1.58)$$

注意，这里假设积分收敛，要求当 $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ 时 $f(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ 。¹⁰因此，例如我们不对 $\delta(\mathbf{x})$ 使用这一表述，但傅里叶变换适用于相关函数 $\xi(\mathbf{x})$ 等量。

⁹不知何故，标准数学方法参考资料很少给出这些闭合关系。（数学家不喜欢狄拉克 δ 函数吗？）例如，我没有在任何地方找到式 (1.47)。

¹⁰实际条件比这更严格，但文献中有时对一维情形要求无穷区间上 $\int |f(x)| d^d x$ 有限，这似乎又过于严格，因为任何幂律都不满足它，而我们在第 1.9 节仍能成功地对幂律进行变换。

一个特殊情形是 $f = 1$ 。它不满足 $f(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ ，因此变换结果不是真正的函数，而是狄拉克 δ 函数：

$$\int d^d x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^d \delta_D^d(\mathbf{k}). \quad (1.59)$$

用 $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ 代替 $\mathbf{k}$ ，得到

$$\int d^d x e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^d \delta_D^d(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (1.60)$$

即无穷体积中平面波的正交关系。因此，标准正交集为

$$\left\{ \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right\}. \quad (1.61)$$

闭合关系具有相同形式，只需交换 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{k}$ ：

$$\int d^d k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}' - \mathbf{x})} = (2\pi)^d \delta_D^d(\mathbf{x}' - \mathbf{x}). \quad (1.62)$$

卷积定理变为（练习）

$$\begin{aligned} (f * g)(\mathbf{x}) &\equiv \int d^d x' f(\mathbf{x}') g(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k f(\mathbf{k}) g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\ (f * g)(\mathbf{k}) &\equiv \int d^d k' f(\mathbf{k}') g(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = (2\pi)^d \int d^d x f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

因此， $(f * g)(\mathbf{x})$ 的傅里叶变换是 $f(\mathbf{k})g(\mathbf{k})$ ，而 $(f * g)(\mathbf{k})$ 的傅里叶变换是 $(2\pi)^d f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ 。

Plancherel 定理为（练习）

$$\int d^d x f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k f^*(\mathbf{k}) g(\mathbf{k}), \quad (1.64)$$

Parseval 定理为

$$\int d^d x f(\mathbf{x})^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k |f(\mathbf{k})|^2. \quad (1.65)$$

即使 V 有限，也可以将傅里叶积分作为近似。通常，先处理傅里叶级数在概念上更简单，例如可以使用克罗内克 $\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ ，而非狄拉克 $\delta_D^d(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ ，最后在需要计算时再换成积分。从级数转向积分的规则是

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^d \sum_{\mathbf{k}} &\longrightarrow \int d^d k, \\ L^d f_{\mathbf{k}} &\longrightarrow f(\mathbf{k}), \\ \left(\frac{L}{2\pi} \right)^d \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &\longrightarrow \delta_D^d(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (1.66)$$

练习：CMB 透镜。 对于天空中的一小块区域，可以采用平坦天空近似，将其视为二维平面。按照这一问题中的惯例，用 $\boldsymbol{\theta}$ 表示二维坐标，用 $\mathbf{l}$ （字母 ell）表示对应的二维波矢。引力透镜使 CMB 光子偏折，令起源于 $\boldsymbol{\theta}$ 的光子看起来来自 $\boldsymbol{\theta} + \nabla\psi(\boldsymbol{\theta})$ ，其中 $\psi(\boldsymbol{\theta})$ 是透镜势。因此，观测到的 CMB 温度 T_{obs} 与未受透镜作用的温度 T 满足

$$T_{\text{obs}}(\boldsymbol{\theta}) = T[\boldsymbol{\theta} + \nabla\psi(\boldsymbol{\theta})] \approx T(\boldsymbol{\theta}) + \nabla\psi(\boldsymbol{\theta}) \cdot \nabla T(\boldsymbol{\theta}). \quad (1.67)$$

用 $T(\mathbf{l})$ 和 $\psi(\mathbf{l})$ 表示 $T_{\text{obs}}(\mathbf{l})$ 。

1.6 功率谱

现在将密度扰动展开为傅里叶级数, 假设一个满足周期边界条件的大立方体盒子 $V = L^d$:

$$\delta(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (1.68)$$

其中

$$\delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{V} \int_V \delta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^d x, \quad (1.69)$$

且 $\delta_{-\mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{k}}^*$ 。注意,

$$\langle \delta(\mathbf{x}) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \delta_{\mathbf{k}} \rangle = 0. \quad (1.70)$$

密度场 $\rho(\mathbf{x})$ 与密度扰动 $\delta(\mathbf{x})$ 的傅里叶系数满足

$$\rho_{\mathbf{k}} = \langle \rho \rangle \delta_{\mathbf{k}} \quad (\mathbf{k} \neq 0), \quad (1.71)$$

因为均匀部分的所有 $\mathbf{k} \neq 0$ 系数均为零; 同时

$$\rho_0 = \bar{\rho} = \langle \rho \rangle (1 + \delta_0) = \langle \rho \rangle (1 + \bar{\delta}), \quad (1.72)$$

其中

$$\bar{\delta} = \frac{\bar{\rho} - \langle \rho \rangle}{\langle \rho \rangle} \quad (1.73)$$

是体积 V 内的平均密度扰动 (见式 (1.7)), 表明这一体积是超密还是欠密。

类比相关函数 $\xi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}') \rangle$, 可以询问傅里叶空间中的对应相关 $\langle \delta_{\mathbf{k}}^* \delta_{\mathbf{k}'} \rangle$ 是什么。由于复数的数学性质, 傅里叶系数的相关用复共轭 $*$ 定义。这样, $\delta_{\mathbf{k}}$ 与自身的相关 $\langle \delta_{\mathbf{k}}^* \delta_{\mathbf{k}} \rangle = \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$ 是实数且非负, 等于 $\delta_{\mathbf{k}}$ 的绝对值 (模) 平方的期望值, 即 $\delta_{\mathbf{k}}$ 的方差。计算得

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\mathbf{k}}^* \delta_{\mathbf{k}'} \rangle &= \frac{1}{V^2} \int d^d x e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int d^d x' e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'} \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}') \rangle \\ &= \frac{1}{V^2} \int d^d x e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int d^d r e^{-i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{r})} \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \\ &= \frac{1}{V^2} \int d^d r e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \xi(\mathbf{r}) \int d^d x e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{V} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \int d^d r e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \xi(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{V} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} P(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (1.74)$$

其中用到了统计均匀性给出的 $\langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \xi(\mathbf{r})$ 。注意, 这里的 $\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ 是克罗内克 δ , 而非密度扰动! 因此, 统计均匀性意味着不同的傅里叶系数 $\delta_{\mathbf{k}}$ 不相关。量

$$P(\mathbf{k}) \equiv V \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \int d^d r e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \xi(\mathbf{r}) \quad (1.75)$$

给出 $\delta_{\mathbf{k}}$ 的方差, 称为 $\delta(\mathbf{x})$ 的功率谱。对于有限体积 V , 式 (1.75) 会遗漏大 r 处的 $\xi(r)$ 。因此, 将真实的理论功率谱定义为该式在 $V \rightarrow \infty$ 时的极限; 根据遍历性假设, 此时也有 $\bar{\rho} = \langle \rho \rangle$ 。于是, 功率谱与相关函数构成一对 d 维傅里叶变换:

$$\xi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} P(\mathbf{k}). \quad (1.76)$$

(相关函数在大间隔处趋于零, 因此适合进行傅里叶变换。) 与相关函数不同, 功率谱 $P(\mathbf{k})$ 处处为正。第 9 节将讨论如何从有限巡天估计 $P(\mathbf{k})$ 。

相关函数无量纲, 而功率谱 $P(\mathbf{k})$ 具有体积量纲 ($\delta(\mathbf{x})$ 和 $\delta_{\mathbf{k}}$ 无量纲)。前面指出, 傅里叶系数的大小依赖于体积 V 。由式 (1.75) 可知, $\delta_{\mathbf{k}}$ 的典型大小随体积增大而减小, 按 $\sqrt{V}$ 的比例衰减。尽

管 $\mathbf{k}$ 模的密度正比于 V 增长, 相邻的 $\delta_{\mathbf{k}}$ 不相关, 因此它们非相干叠加。例如, $\mathbf{k}$ 模数目增加到四倍, 只会使 $\sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ 增大到两倍, 这由 $\delta_{\mathbf{k}}$ 减小到一半来补偿。

由统计各向同性,

$$\xi(\mathbf{r}) = \xi(r) \Rightarrow P(\mathbf{k}) = P(k), \quad (1.77)$$

因为球对称函数的傅里叶变换仍然球对称。因此, $\delta_{\mathbf{k}}$ 的方差只依赖于波矢的模 k , 即相应的距离尺度。小距离尺度对应大 k , 反之亦然; 为了避免混淆, 谈论 k 时最好用“高”“低”而不是“大”“小”: 小尺度对应高 k , 大尺度对应低 k 。

按照式 (1.66) 从傅里叶系数转到傅里叶变换, 式 (1.74) 给出

$$\langle \delta(\mathbf{k})^* \delta(\mathbf{k}') \rangle \equiv (2\pi)^d \delta_D^d(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P(k). \quad (1.78)$$

注意, 使用 $\delta_{\mathbf{k}}$ 时, 可以写 $P(k) \equiv V \langle \delta_{\mathbf{k}}^* \delta_{\mathbf{k}} \rangle$, 无需在式中引入 $\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$; 但使用 $\delta(\mathbf{k})$ 时, 必须在 $P(k)$ 的定义中使用狄拉克 δ_D 函数。

相关函数与观测联系更直接, 而理论预言更自然地用 $P(k)$ 表达, 尤其是在密度扰动较小、更接近原初状态的大距离尺度上。原则上, 一旦从观测确定 $\xi(r)$ 和 $P(k)$ 中的一个, 就可通过傅里叶变换得到另一个。实际上, 观测误差会使这一过程不够准确, 最好分别采用针对各自优化的方法来测量。尤其在大间隔处, $\xi(r)$ 很小, 很难甚至根本无法准确测定。由于这些原因, 大距离尺度 (低 k) 的密度扰动通常用 $P(k)$ 讨论, 小距离尺度 (小 r) 则通常用 $\xi(r)$ 讨论。

对于密度方差, 有

$$\begin{aligned} \langle \delta^2 \rangle \equiv \xi(0) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k P(k) = \frac{C_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty P(k) k^{d-1} dk \\ &= \frac{C_d}{(2\pi)^2} \int_0^\infty k^d P(k) \frac{dk}{k} \equiv \int_{-\infty}^\infty \mathcal{P}(k) d \ln k, \end{aligned} \quad (1.79)$$

其中定义了

$$\mathcal{P}(k) \equiv \frac{C_d k^d}{(2\pi)^d} P(k) = \frac{k}{\pi} P(k), \quad \frac{k^2}{2\pi} P(k), \quad \frac{k^3}{2\pi^2} P(k) \quad (d = 1, 2, 3). \quad (1.80)$$

$\mathcal{P}(k)$ 的另一种常用记号是 $\Delta^2(k)$ 。¹¹ “功率谱”既可指 $P(k)$, 也可指 $\mathcal{P}(k)$ 。两者之中, $\mathcal{P}(k)$ 的物理意义更直观: 它给出一个对数尺度区间, 即从 k 到 ek , 对密度方差的贡献。 $\mathcal{P}(k)$ 无量纲, 而 $P(k)$ 具有 d 维体积的量纲。

图 3 展示了斯隆数字巡天观测得到的功率谱。与式 (1.79) 对应的关系是

$$P(0) = \lim_{k \rightarrow 0} P(k) = \int d^d r \xi(r). \quad (1.81)$$

若¹²当 $k \rightarrow 0$ 时 $P(k) \rightarrow 0$, 便得到积分约束

$$\int d^d r \xi(r) = 0. \quad (1.82)$$

因此, $\xi(r)$ 必须在某些 r 处变为负值, 意味着与超密区域相隔这样的距离时, 更可能遇到欠密区域。(随着间隔不断增大, $\xi(r)$ 可以围绕零振荡, 振幅逐渐减小。人们对 $\xi(r)$ 的兴趣主要集中在最初正值区域内较小的 r 。)目前的认识是, 当 $k \rightarrow 0$ 时, 确实有 $P(k) \rightarrow 0$, 意味着结构在更大尺度上以足够快的速率变弱。当然, 我们仅掌握宇宙有限区域的信息, 因此这属于从可观测宇宙作出的外推。原则上, 视界之外可能有奇特的行为, 但既然可观测宇宙中没有这种迹象, 采用这样的外推是合理的。

¹¹ 宇宙学家常用 $\mathcal{P}(k)$, 并称之为“功率谱”; 天文学家似乎更常用 $\Delta^2(k)$, 而将“功率谱”一词留给 $P(k)$ 。

¹² 由式 (1.75), $P(0) = V \langle (\delta_0)^2 \rangle$, 其中 $\delta_0 = \bar{\delta} = (\bar{\rho} - \langle \rho \rangle) / \langle \rho \rangle$ 。尽管 $\langle \bar{\delta} \rangle = 0$, 对于有限 V , $\langle \bar{\delta}^2 \rangle = (\langle \bar{\rho}^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2) / \langle \rho \rangle^2 = \xi_V \neq 0$ 。

对各向同性的 $\xi(r)$ 和 $P(k)$, 可以转到极坐标、球坐标等坐标系, 并完成角积分, 将式 (1.75) 和 (1.76) 写成一维积分 (练习):

$$\begin{aligned} P(k) &= \int_0^\infty \xi(r) \cos(kr) 2dr, & \mathcal{P}(k) &= \frac{2k}{\pi} \int_0^\infty \xi(r) \cos(kr) dr & (\text{一维}), \\ P(k) &= \int_0^\infty \xi(r) J_0(kr) 2\pi r dr, & \mathcal{P}(k) &= k^2 \int_0^\infty \xi(r) J_0(kr) r dr & (\text{二维}), \\ P(k) &= \int_0^\infty \xi(r) \frac{\sin kr}{kr} 4\pi r^2 dr, & \mathcal{P}(k) &= \frac{2k^3}{\pi} \int_0^\infty \xi(r) \frac{\sin kr}{kr} r^2 dr & (\text{三维}). \end{aligned} \quad (1.83)$$

以及

$$\begin{aligned} \xi(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty P(k) \cos(kr) dk = \int_0^\infty \mathcal{P}(k) \cos(kr) \frac{dk}{k} & (\text{一维}), \\ \xi(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty P(k) J_0(kr) k dk = \int_0^\infty \mathcal{P}(k) J_0(kr) \frac{dk}{k} & (\text{二维}), \\ \xi(r) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty P(k) \frac{\sin kr}{kr} 4\pi k^2 dk = \int_0^\infty \mathcal{P}(k) \frac{\sin kr}{kr} \frac{dk}{k} & (\text{三维}). \end{aligned} \quad (1.84)$$

其中 J_0 是贝塞尔函数, $\sin(kr)/(kr) = j_0(kr)$ 是球贝塞尔函数。对于三维情形, 式 (1.15) 定义的体积平均 $\bar{\xi}(R)$ 为 (练习)

$$\bar{\xi}(R) = \int_0^\infty \mathcal{P}(k) \left[\frac{3(\sin kR - kR \cos kR)}{(kR)^3} \right] \frac{dk}{k} = \int_0^\infty \mathcal{P}(k) \left[\frac{3}{kR} j_1(kR) \right] \frac{dk}{k}. \quad (1.85)$$

“方括号中的因子随 k 增大而衰减得比式 (1.84) 中的 $\sin(kr)/(kr)$ 更快, 因此, 与 $\xi(R)$ 相比, $\bar{\xi}(R)$ 能更干净地测量 $k \sim 1/R$ 处的功率谱。” (MBW [2], 第 263 页。) 这是在比较 $j_0(x)$ 与 $(3/x)j_1(x)$, 其中 $j_n(x)$ 是球贝塞尔函数。它们是初等函数, 因此此处暂不展开讨论, 后面还会遇到。

例。 我们计算式 (1.83) 的二维情形, 因为其中涉及非初等函数 J_0 :

$$P(k) = \int d^2r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \xi(r) = \int_0^\infty r dr \xi(r) \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ikr \cos \varphi}, \quad (1.86)$$

角积分给出

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ikr \cos \varphi} = 2 \int_0^\pi d\varphi \cos(kr \cos \varphi) = 2\pi J_0(kr), \quad (1.87)$$

这里用了贝塞尔函数的积分表示 (文献 [8], 第 680 页):

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \varphi) d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \varphi) d\varphi. \quad (1.88)$$

这两个积分相等, 是因为 $\cos \varphi$ 和 $\sin \varphi$ 以相同速率遍历相同的值。由于外层余弦是偶函数, 对每个象限积分都给出相同结果, 例如也可以从 $\pi/2$ 积到 π 。

1.6.1 有限巡天的功率谱

接着第 1.3 节, 定义

$$\hat{\delta}_{\mathbf{k}} \equiv \frac{1}{V} \int_V \hat{\delta}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^d x, \quad (1.89)$$

其中, 根据式 (1.36),

$$\hat{\delta}(\mathbf{x}) \equiv \frac{\rho(\mathbf{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}.$$

常数项只影响 $\mathbf{k} = 0$ 的系数, 很容易看出

$$\hat{\delta}_0 = 0, \quad (1.90)$$

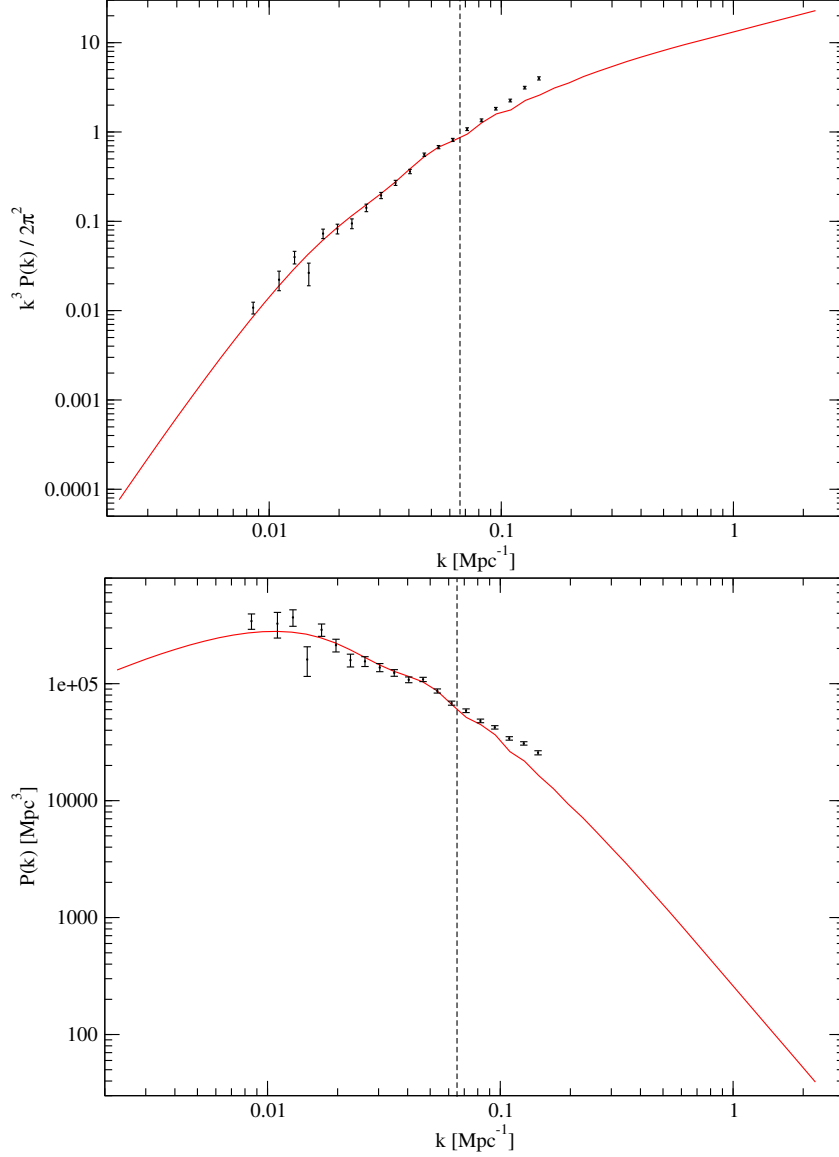


图 3: 利用 SDSS 亮红星系得到的物质功率谱 [13]。上图为 $\mathcal{P}(k)$ ，下图为 $P(k)$ 。本图假设 $H_0 = 71.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ 。（这些星系巡天给出的尺度仍含哈勃常数这一因子，因此观测 $P(k)$ 通常以 $h \text{ Mpc}^{-1}$ 为 k 的单位、以 $h^{-3} \text{ Mpc}^3$ 为 $P(k)$ 的单位，从而无需假定 H_0 的数值。）黑色误差棒为观测，红色曲线是根据线性微扰论对数据作出的理论拟合。下图中可以清楚看到 $P(k)$ 在 $k_{\text{eq}} \sim 0.01 \text{ Mpc}^{-1}$ 附近的转折。当 $\mathcal{P}(k) \gtrsim 1$ 时，线性微扰论失效，因此虚线右侧的数据点不再沿着理论曲线分布；虚线表示对线性理论适用范围的估计。图由 R. Keskitalo 绘制。

而对于 $\mathbf{k} \neq 0$,

$$\hat{\delta}_{\mathbf{k}} = \frac{\rho_{\mathbf{k}}}{\bar{\rho}} = \frac{\langle \rho \rangle}{\bar{\rho}} \delta_{\mathbf{k}}. \quad (1.91)$$

定义“从巡天体积 V 得到的功率谱估计”(实际的功率谱估计将在第 9 节讨论)为

$$\hat{P}(k) \equiv V |\hat{\delta}_{\mathbf{k}}|^2, \quad (1.92)$$

则有

$$\hat{P}(0) = 0, \quad (1.93)$$

对于 $\mathbf{k} \neq 0$,

$$\hat{P}(k) = V \left(\frac{\langle \rho \rangle}{\bar{\rho}} \right)^2 |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \Rightarrow \langle \hat{P}(k) \rangle = \left(\frac{\langle \rho \rangle}{\bar{\rho}} \right)^2 P(k). \quad (1.94)$$

因此,有限体积只通过一个常数因子使功率谱估计产生偏差,而不像相关函数估计那样出现较复杂的积分约束效应。

练习。 对式 (1.36) 中“观测到的” $\hat{\delta}(\mathbf{x})$ 作傅里叶展开,得到系数 $\hat{\delta}_{\mathbf{k}}$ 。证明对于这单个实现,

$$\hat{\xi}(\mathbf{r}) = \frac{V}{(2\pi)^d} \int d^d k |\hat{\delta}_{\mathbf{k}}|^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (1.95)$$

注意,这里不需要任何统计假设,例如统计均匀性或遍历性。将这一结果与式 (1.76) 比较。

1.7 贝塞尔函数

二维傅里叶变换会引入贝塞尔函数 $J_n(x)$, 其中 $n = 0, 1, 2, \dots$ 。它们主要用于正实轴; 在此区间内, 它们是振荡函数, 振幅随 x 增大而减小, 渐近行为为 $x^{-1/2}$ 。见图 4。下面列出一些性质:

$$J_0(0) = 1, \quad J_n(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.96)$$

其幂级数的前几项为

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} - \frac{x^{n+2}}{2^{n+2} (n+1)!} + \dots \quad (1.97)$$

它们具有积分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi = \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^\pi e^{ix \cos \varphi} \cos(n\varphi) d\varphi. \quad (1.98)$$

两个被积函数关于 φ 都是偶函数, 并具有 2π 周期, 因此可以替换积分区间:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi}. \quad (1.99)$$

它们及其导数之间满足若干递推公式:

$$\begin{aligned} J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) &= \frac{2n}{x} J_n(x), \\ J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) &= 2J'_n(x), \\ J_{n-1}(x) &= \frac{n}{x} J_n(x) + J'_n(x), \\ J_{n+1}(x) &= \frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x). \end{aligned} \quad (1.100)$$

作为式 (1.100) 第二行的特例, 有

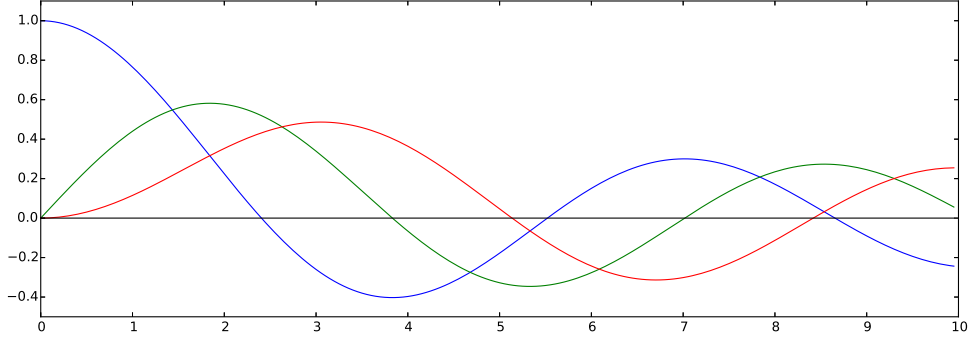


图 4: 前三个贝塞尔函数: J_0 (蓝色)、 J_1 (绿色) 和 J_2 (红色)。

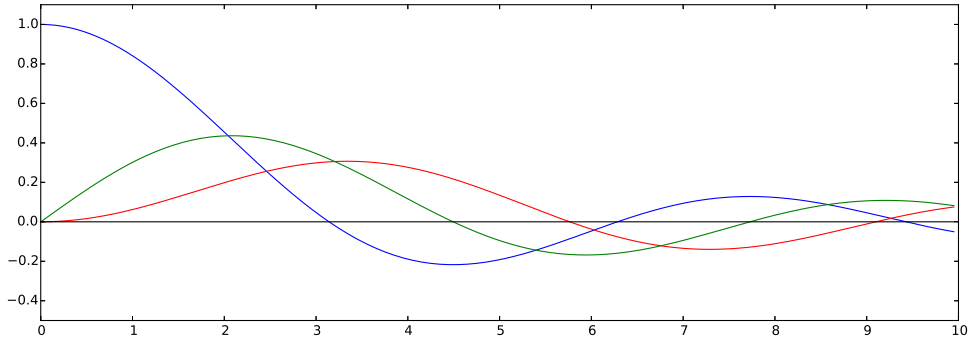


图 5: 前三个球贝塞尔函数: j_0 (蓝色)、 j_1 (绿色) 和 j_2 (红色)。

$$J'_0(x) = -J_1(x). \quad (1.101)$$

贝塞尔函数的闭合关系适用于相同 n 、不同波长的贝塞尔函数:

$$\int_0^\infty J_n(\alpha x) J_n(\alpha' x) x dx = \frac{1}{\alpha} \delta_D(\alpha - \alpha'). \quad (1.102)$$

对相邻阶数 n 和 $n - 1$ 的贝塞尔函数, 有一个略为相似的积分 (注意积分测度是 dx 而非 $x dx$; Gradshteyn 和 Ryzhik [9], 式 6.512.3):

$$\int_0^\infty J_n(\alpha x) J_{n-1}(\beta x) dx = \frac{\beta^{n-1}}{\alpha^n} \Theta(\alpha - \beta) = \begin{cases} 0, & \alpha < \beta, \\ \frac{1}{2\alpha}, & \alpha = \beta, \\ \frac{\beta^{n-1}}{\alpha^n}, & \alpha > \beta. \end{cases} \quad (1.103)$$

1.8 球贝塞尔函数

整数阶球贝塞尔函数 $j_n(x)$ 与半整数阶普通贝塞尔函数的关系为

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x). \quad (1.104)$$

与 J_n 一样, 它们主要用于正实轴, 在那里也是振荡函数; 但振幅衰减得更快, 渐近行为为 x^{-1} , 见图 5。与 J_n 不同, 对于整数 n , 它们是初等函数, 见表 1。下面列出一些性质:

$$j_0(0) = 1, \quad j_n(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.105)$$

球贝塞尔函数
$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$
$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$
$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x$

表 1: 球贝塞尔函数。

幂级数的前几项为

$$j_n(x) = \frac{2^n n! x^n}{(2n+1)!} - \frac{2^n (n+1)! x^{n+2}}{(2n+3)!} + \dots \quad (1.106)$$

它们及其导数之间的递推关系为

$$\begin{aligned} j_{n-1}(x) + j_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{x} j_n(x), \\ nj_{n-1}(x) - (n+1)j_{n+1}(x) &= (2n+1)j'_n(x). \end{aligned} \quad (1.107)$$

作为第二行的特例, 有

$$j'_0(x) = -j_1(x). \quad (1.108)$$

1.9 幂律谱

在某些尺度范围内, $\xi(r)$ 和 $P(k)$ 可以近似为幂律形式:

$$\xi(r) \propto r^{-\gamma}, \quad \text{或} \quad P(k) \propto k^n. \quad (1.109)$$

注意 ξ 指数中的负号: 我们预期相关随间隔增大而减弱, 因此这样定义可使 γ 为正。在双对数坐标下, 这类函数是斜率分别为 $-\gamma$ 和 n 的直线:

$$\log \xi = -\gamma \log r + \text{const}, \quad \log P = n \log k + \text{const}. \quad (1.110)$$

比例常数可以用某个参考尺度表示。对于 $\xi(r)$, 通常选择满足 $\xi(r_0) = 1$ 的尺度 r_0 , 从而

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma}. \quad (1.111)$$

见图 6。对于 $P(k)$, 可以写为

$$P(k) = A^2 \left(\frac{k}{k_p}\right)^n, \quad \text{或} \quad \mathcal{P}(k) = A^2 \left(\frac{k}{k_p}\right)^{n+d}, \quad (1.112)$$

其中 k_p 称为枢轴尺度 (pivot scale), 其选择取决于具体应用; $A \equiv \sqrt{P(k_p)}$ 或 $\sqrt{\mathcal{P}(k_p)}$ 是功率谱在枢轴尺度处的振幅。¹³

定义谱指数 $n(k)$ 为

$$n(k) \equiv \frac{d \ln P}{d \ln k}. \quad (1.113)$$

¹³这里不仿照式 (1.111), 定义功率谱等于 1 的 k_0 , 是因为 $P(k)$ 有量纲, 而讨论 $\mathcal{P}(k)$ 时, 通常关注 $\mathcal{P}(k) \ll 1$ 的尺度和时刻。因此, 满足 $\mathcal{P}(k_0) = 1$ 的 k_0 会位于感兴趣的区域或幂律近似的适用范围之外。

它给出双对数图中 $P(k)$ 的斜率。若 $P(k)$ 为幂律，则 $n(k) = \text{const} = n$ 。研究幂律形式的 $\xi(r)$ 和 $P(k)$ ，有助于直观理解不同谱指数的意义，以及 γ 与 n 之间的关系。

幂律的傅里叶变换仍为幂律。对于式 (1.111) 的相关函数，有（练习）

$$\begin{aligned} \text{一维: } P(k) &= \frac{2}{k} \Gamma(1-\gamma) \sin\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right) (kr_0)^\gamma, & 0 < \gamma < 1 \Rightarrow -1 < n < 0, \\ \text{二维: } P(k) &= \frac{2\pi}{k^2} 2^{1-\gamma} \frac{\Gamma(1-\gamma/2)}{\Gamma(\gamma/2)} (kr_0)^\gamma, & \frac{1}{2} < \gamma < 2 \Rightarrow -\frac{3}{2} < n < 0, \\ \text{三维: } P(k) &= \frac{4\pi}{k^3} \Gamma(2-\gamma) \sin\frac{(2-\gamma)\pi}{2} (kr_0)^\gamma, & 1 < \gamma < 3 \Rightarrow -2 < n < 0. \end{aligned} \quad (1.114)$$

因此 γ 与 n 满足

$$n = \gamma - d. \quad (1.115)$$

用 $\mathcal{P}(k)$ 表示则为

$$\begin{aligned} \text{一维: } \mathcal{P}(k) &= \frac{2}{\pi} \Gamma(1-\gamma) \sin\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right) (kr_0)^\gamma, \\ \text{二维: } \mathcal{P}(k) &= 2^{1-\gamma} \frac{\Gamma(1-\gamma/2)}{\Gamma(\gamma/2)} (kr_0)^\gamma, \\ \text{三维: } \mathcal{P}(k) &= \frac{2}{\pi} \Gamma(2-\gamma) \sin\frac{(2-\gamma)\pi}{2} (kr_0)^\gamma. \end{aligned} \quad (1.116)$$

三维情况下，上述表达式在 $\gamma = 2$ 处没有定义，此时有更简单的结果：

$$P(k) = \frac{2\pi^2}{k^3} (kr_0)^2, \quad \mathcal{P}(k) = (kr_0)^2. \quad (1.117)$$

观测上，三维相关函数在小间隔处有 $\gamma \approx 1.8$ ，对应高 k 处 $n \approx -1.2$ 。斯隆数字巡天的观测功率谱见图 3。注意，幂律相关函数处处为正。当 $\lim_{k \rightarrow 0} P(k) \neq 0$ 时，这是可能的；上面允许的谱指数 $n < 0$ 确实满足这一条件。（此时，在不断增大的尺度上始终有足够强的结构，维持更远距离处的正相关。）实际的功率谱在大尺度处发生转折，使低 k 处的谱指数变为正值；相关函数因此也改变形状，并在足够大的 r 处取负值。

在上述谱指数范围之外，傅里叶变换积分会在小尺度或大尺度极限下发散（我猜如此）；但这并不妨碍 $\xi(r)$ 或 $P(k)$ 在某个有限尺度范围内具有这样的幂律形式。

方差

$$\langle \delta^2 \rangle = \xi(0) = \int_0^\infty \mathcal{P}(k) \frac{dk}{k} \propto \int_0^\infty k^{n+d-1} dk = \frac{1}{n+d} [k^{n+d}]_0^\infty \quad (n \neq -d) \quad (1.118)$$

在 $n \leq -d$ 时于大尺度（低 k ）发散，在 $n \geq -d$ 时于小尺度（高 k ）发散。因此，应在 $k \rightarrow 0$ 时满足 $n > -d$ ，在 $k \rightarrow \infty$ 时满足 $n < -d$ 。在宇宙学中，大尺度不是问题，因为确实有 $n > -d$ 。在小尺度处，对于任意正的 γ ，式 (1.111) 都迫使 $r \rightarrow 0$ 时 $\xi(r) \rightarrow \infty$ 。解决办法是认识到，任意小的尺度并非都与问题有关；实际上总有有限分辨率，截去最小的尺度。这可以用第 1.10 节讨论的窗函数实现。

$n = -d$ ($\gamma = 0$) 对应尺度不变谱， $\mathcal{P}(k) = \text{const}$ 。这意味着，无论尺度多大，宇宙看起来都具有相同程度的不均匀性，不会渐近趋于均匀。注意，此处讨论的是密度的谱。宇宙学中所说的尺度不变或近尺度不变谱，通常指引力势（牛顿处理）或时空曲率扰动（广义相对论处理）的谱；它们的谱指数低 4，因此这样的尺度不变谱在三维中对应密度谱指数 $n = 1$ 。

边界情形 $n = 0$ 在所有尺度上具有相同的 $\langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$ 。由式 (1.115)，当 $n \rightarrow 0$ 时 $\gamma \rightarrow d$ 。对于 $\gamma < d$ ，式 (1.14) 中从 0 到 R 的积分使 $\bar{\xi}(R)$ 平滑掉了 $\xi(r)$ 的小尺度发散；但当 $\gamma \geq d$ 时，该积分也发散。实际上，式 (1.114) 和 (1.116) 的三维表达式也会发散， $\Gamma(-1) = \infty$ ，使有限的 ξ 对应无穷

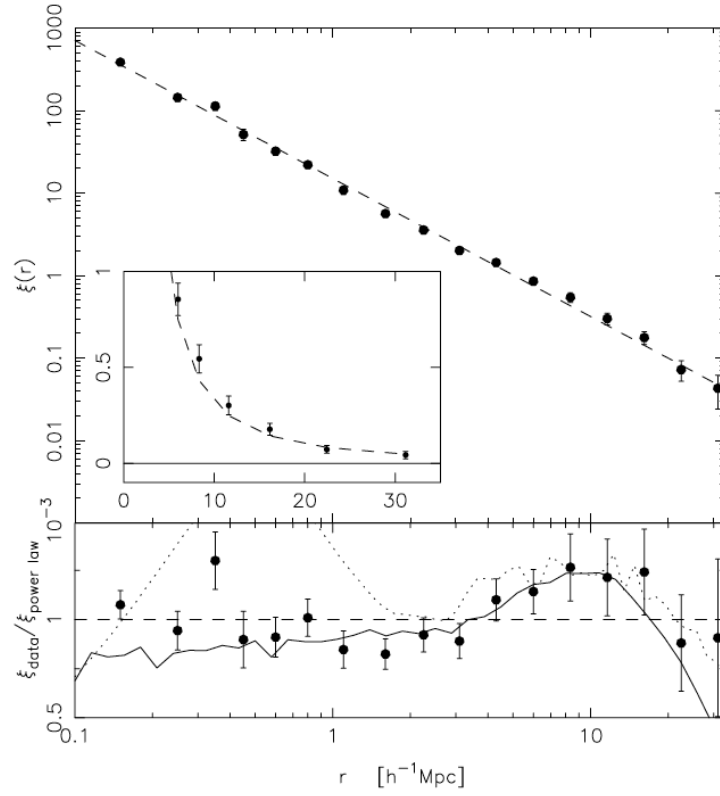


图 6: 上图: 2dFGRS 星系巡天的相关函数, 以双对数坐标表示。虚线为最佳拟合幂律, $r_0 = 5.05 h^{-1} \text{Mpc}$ 、 $\gamma = 1.67$; 内嵌图以线性坐标展示相同结果。下图: 2dFGRS 数据 (带误差棒的实心圆点) 除以幂律拟合。实线为 APM 巡天的结果, 虚线为 N 体模拟的结果。本图取自文献 [10] 图 11。

大的 $P(k)$ 。相反, $n = 0$ 对应无相关情形 $\xi = 0$, 称为白噪声 (white noise) 或泊松分布, 后者将在第 2.3 节讨论。

n 越大, 结构越集中于小尺度。Peacock 评论说, $n \geq 0$ 的谱似乎表明所有大尺度结构都是“偶然的”, 只是“反映了某个小尺度过程的低 k 傅里叶系数”, 而 $n < 0$ 意味着大尺度结构是“真实的” (文献 [1], 第 499 页)。

例。式 (1.114) 中的一维和三维情形属于 FYMM I 的标准内容, 但二维情形需要借助积分表:

$$\begin{aligned} P(k) &= \int_0^\infty \xi(r) J_0(kr) 2\pi r dr = 2\pi r_0^\gamma \int_0^\infty r^{1-\gamma} J_0(kr) dr \\ &= \frac{2\pi(kr_0)^\gamma}{k^2} \int_0^\infty x^{1-\gamma} J_0(x) dx. \end{aligned} \quad (1.119)$$

由 Gradshteyn 和 Ryzhik [9] 的公式 6.561.14,

$$\int_0^\infty x^\mu J_\nu(x) dx = 2^\mu \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu)} \quad (-\nu - 1 < \mu < \frac{1}{2}). \quad (1.120)$$

这里 $\nu = 0$ 、 $\mu = 1 - \gamma$, 故条件变为 $\frac{1}{2} < \gamma < 2$, 结果为

$$\int_0^\infty x^{1-\gamma} J_0(x) dx = 2^{1-\gamma} \frac{\Gamma(1 - \gamma/2)}{\Gamma(\gamma/2)}. \quad (1.121)$$

1.10 所关注的尺度与窗函数

在式 (1.79) 中, 我们对所有尺度积分, 从无限大 ($k = 0, \ln k = -\infty$) 到无限小 ($k = \infty, \ln k = \infty$), 以得到密度方差。但这也许并不是我们真正想要的。今天的平均物质密度为 $3 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$, 地球密度为 $5.5 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, 原子核密度为 $2 \times 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$, 对应 $\delta \approx 2 \times 10^{30}$ 和 $\delta \approx 10^{44}$ 。在如此小的尺度上探测宇宙密度, 会得到巨大的方差, 但这已不属于宇宙学的话题: 这里不讨论行星科学或核物理。

即使对单个星系内部结构的研究, 通常也不归入宇宙学。因此, 至少在讨论当前宇宙时, 宇宙学关注的最小共动尺度是相邻星系间典型间距, 约为 1 Mpc。

为了去除小于 R 的尺度, 即 $r < R$ 或 $k > R^{-1}$, 可以用窗函数 (window function, 有时称滤波函数) 对密度场滤波。这既可以在 k 空间中完成, 也可以在 x 空间中完成。

在 x 空间中, 滤波通过卷积实现。引入通常球对称的窗函数 $W(\mathbf{r}; R)$, 满足归一化条件

$$\int d^d r W(\mathbf{r}; R) = 1, \quad (1.122)$$

且在 $|\mathbf{r}| \gg R$ 时 $W \sim 0$ 。定义滤波后的密度场为

$$\delta(\mathbf{x}; R) \equiv (\delta * W)(\mathbf{x}) \equiv \int d^d x' \delta(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (1.123)$$

这里将 $\delta(\mathbf{x}; R)$ 和 $W(\mathbf{x}; R)$ 视为 $\mathbf{x}$ 的函数, 而 R 表示选定的分辨率。为简化记号, 以下将 $W(\mathbf{x}; R)$ 写为 $W(\mathbf{x})$, 省略尺度 R 。同时假设 W 球对称, 从而可写成 $W(r)$ 。

将 $\delta(\mathbf{x}; R)$ 的傅里叶系数记作 $\delta_{\mathbf{k}}(R)$ 。对 $\delta(\mathbf{x})$ 和 $\delta(\mathbf{x}; R)$ 使用傅里叶级数; 但由于 $W(r)$ 在大 r 处消失, 可以对其使用傅里叶变换 $W(\mathbf{k})$ 。因此需要卷积定理的一种混合形式, 直接计算如下:

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{k}}(R) &= \frac{1}{V} \int_V d^d x \delta(\mathbf{x}; R) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{V} \int_V d^d x d^d x' \delta(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{V} \int_V d^d x' \delta(\mathbf{x}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} \int d^d r W(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = W(\mathbf{k}) \delta_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (1.124)$$

其中

$$W(\mathbf{k}) = \int d^d r W(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.125)$$

是 $W(\mathbf{r})$ 的傅里叶变换。¹⁴在所用归一化下, $W(\mathbf{r})$ 的量纲为 $1/V$, $W(\mathbf{k})$ 无量纲且 $W(k=0) = 1$ 。由于 $W(\mathbf{r}) = W(r)$ 球对称, $W(\mathbf{k}) = W(k)$ 也球对称; 又因为 $W(-\mathbf{r}) = W(\mathbf{r})$, 所以 $W(\mathbf{k})$ 是实数。

这些滤波后傅里叶系数的相关为

$$\langle \delta_{\mathbf{k}}^*(R) \delta_{\mathbf{k}'}(R) \rangle = W(\mathbf{k})^* W(\mathbf{k}') \langle \delta_{\mathbf{k}}^* \delta_{\mathbf{k}'} \rangle = \frac{1}{V} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} W(k)^2 P(k), \quad (1.126)$$

因此滤波后的功率谱为

$$W(k)^2 P(k), \quad \text{以及} \quad W(k)^2 \mathcal{P}(k). \quad (1.127)$$

滤波后的相关函数为

$$\xi(r; R) \equiv \langle \delta(\mathbf{x}; R) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}; R) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} W(k)^2 P(k), \quad (1.128)$$

滤波后密度场的方差为

$$\sigma^2(R) \equiv \langle \delta(\mathbf{x}; R)^2 \rangle = \xi(0; R) = \int_0^\infty W(k)^2 \mathcal{P}(k) \frac{dk}{k}. \quad (1.129)$$

将它视为 R 的函数, 就得到衡量不同尺度结构的另一种方法。用傅里叶变换表示 $W(k)$ 和 $P(k)$, 得到 (练习)

$$\sigma^2(R) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k W(k)^2 P(k) = \int d^d x d^d x' \xi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) W(\mathbf{x}) W(\mathbf{x}'). \quad (1.130)$$

谱矩。 更一般地, 定义谱矩 (spectral moments)

$$\sigma_\ell^2(R) \equiv \int_0^\infty k^{2\ell} \mathcal{P}(k) W(k)^2 \frac{dk}{k}, \quad (1.131)$$

于是 $\sigma^2(R) = \sigma_0^2(R)$ 是零阶矩。关系 $\sigma^2(R) = \xi(0; R)$ 可以推广到高阶矩和 $\xi(r; R)$ 在 $r = 0$ 处的导数, 因为例如

$$\begin{aligned} \nabla^2 \xi(r; R) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k (-k^2) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} W(k)^2 P(k), \\ \Rightarrow \nabla^2 \xi(0; R) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k (-k^2) W(k)^2 P(k) = -\sigma_1^2(R). \end{aligned} \quad (1.132)$$

未滤波的 $\xi(r)$ 及其导数可能在 $r = 0$ 处发散, 但 $\xi(0; R)$ 已被窗函数平滑。Peacock [1] 第 500 页给出

$$\xi^{(2\ell)}(0; R) = (-1)^\ell \frac{\sigma_\ell^2(R)}{2\ell + 1}. \quad (1.133)$$

这个形式大概只适用于 $d = 3$, 因为我得到的是

$$\xi''(0, R) = -\frac{\sigma_1^2(R)}{d}. \quad (1.134)$$

我没有尝试计算更高阶矩。

为由式 (1.132) 得到式 (1.134), 需要在 $r = 0$ 处建立 $\nabla^2 \xi(r; R)$ 与 $\xi''(r, R)$ 的关系。展开

$$\xi(r, R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n, \quad (1.135)$$

¹⁴当 $\mathbf{x}$ 距体积 V 的边缘小于 R 时, 窗函数会收集 V 外的贡献。在这一卷积定理中, 我们使用了周期边界条件; 实际应用中需要考虑边缘效应。

其中 $a_1 = 0$ ，使 $\xi(r; R)$ 在 $r = 0$ 处光滑。现在有

$$\partial_i r^n = n r^{n-1} \partial_i r = n r^{n-2} x_i \quad \Rightarrow \quad \partial_i \xi(r; R) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n r^{n-2} x_i, \quad (1.136)$$

以及

$$\partial_j \partial_i \xi(r, R) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n [(n-2) r^{n-4} x_i x_j + r^{n-2} \partial_j x_i], \quad (1.137)$$

其中 $\partial_j x_i = \delta_{ij}$ 。因此，当 $r \rightarrow 0$ 时，

$$\nabla^2 \xi(r, R) \equiv \sum_i \partial_i \partial_i \xi(r) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n [(n-2) r^{n-2} + d r^{n-2}] \longrightarrow 2d a_2, \quad (1.138)$$

而

$$\xi''(r, R) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) r^{n-2} \longrightarrow 2a_2, \quad (1.139)$$

所以

$$\nabla^2 \xi(0; R) = d \cdot \xi''(0; R). \quad (1.140)$$

最简单的窗函数是顶帽窗函数 (top-hat window function)：

$$W_T(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{V(R)} \quad (|\mathbf{r}| \leq R), \quad (1.141)$$

其他位置 $W_T(\mathbf{r}) = 0$ 。也就是说，将 $\delta(\mathbf{x})$ 替换为距离 R 以内的平均值，从而实现滤波。它的傅里叶变换¹⁵为 (练习)

$$\begin{aligned} \text{一维: } W_T(k) &= \frac{1}{kR} \sin kR, \\ \text{二维: } W_T(k) &= \frac{2}{kR} J_1(kR), \\ \text{三维: } W_T(k) &= \frac{3}{(kR)^3} (\sin kR - kR \cos kR) = \frac{3}{kR} j_1(kR). \end{aligned} \quad (1.142)$$

数学上更方便的是高斯窗函数：

$$W_G(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{V_G(R)} e^{-r^2/(2R^2)}, \quad (1.143)$$

其中

$$V_G(R) \equiv \int d^d r e^{-|\mathbf{r}|^2/(2R^2)} \quad (1.144)$$

是 W_G 的体积。窗函数的体积定义如下：若将 W 归一化为 $W(0) = 1$ ，而非式 (1.122) 所选的归一化，则 $\int d^d r W(\mathbf{r})$ 的值就是其体积。对于顶帽，它就是滤波平均所覆盖的体积；对其他窗函数，则是这一概念的推广。

W_G 的体积为 (练习)

$$V_G(R) = (2\pi)^{d/2} R^d, \quad (1.145)$$

其傅里叶变换对所有 d 都是 (练习)

$$W_G(k) = e^{-(kR)^2/2}. \quad (1.146)$$

一维情形已在 FYMM Ib 中完成，由此很容易推广到任意 d 。

¹⁵ 注意贝塞尔函数在这里呈现出的规律：三角函数是“一维的贝塞尔函数”， $\cos$ 和 $\sin$ 分别对应 J_0 和 J_1 ；普通贝塞尔函数 J_n 用于二维；球贝塞尔函数用于三维。它们都是振荡函数：三角函数振幅不变， J_n 在大 x 处按 $x^{-1/2}$ 衰减， j_n 按 x^{-1} 衰减。

还可以定义 k 空间顶帽窗函数:

$$W_k(k) \equiv 1 \quad (k \leq 1/R), \quad (1.147)$$

其他位置 $W_k(k) = 0$ 。在 x 空间中, 它变为 (练习)

$$\text{三维: } W_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi^2 R^3} \frac{\sin y - y \cos y}{y^3} = \frac{1}{6\pi^2 R^3} \frac{3j_1(y)}{y}, \quad y \equiv |\mathbf{r}|/R. \quad (1.148)$$

积分 $\int d^3r W_k(\mathbf{r}) = 4\pi \int r^2 dr W_k(r)$ 发散: 被积函数随 r 作等幅振荡。被积函数最初的几个零点为 4.493、7.725、10.904、14.066 和 17.221; 分别积到这些位置, 积分值为 99.21、20.645、97.37、21.24 和 97.10 倍的 R^3 。这种振荡是该窗函数的缺点, 但它还有其他优点。在这种情况下, 将体积定义为

$$\text{三维: } V_k(R) = 6\pi^2 R^3 \approx 59.22 R^3, \quad (1.149)$$

使得与其他窗函数一样, 有 $W_k(0) = 1/V_k$ 。这一数值位于积分振荡的中间。尽管存在这些振荡, 我们仍预期式 (1.123) 收敛, 因为在大 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ 处, 正负 δ 倾向于相互抵消。

对于这一窗函数, 密度方差简单地为

$$\sigma^2(R) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^{R^{-1}} C_d k^{d-1} P(k) dk = \int_{-\infty}^{-\ln R} \mathcal{P}(k) d \ln k. \quad (1.150)$$

注意, 不同窗函数的体积有很大差别, 见图 7。在三维中,

$$\begin{aligned} V_T(R) &= \frac{4\pi}{3} R^3 = 4.189 R^3, \\ V_G(R) &= (2\pi)^{3/2} R^3 = 15.75 R^3, \\ V_k(R) &= 6\pi^2 R^3 = 59.22 R^3. \end{aligned} \quad (1.151)$$

使体积相同的尺度满足 $R_G = 0.6431 R_T$ 、 $R_k = 0.4136 R_T$ 。因此, 对于不同窗函数, 给定的 R 对应的有效尺度略有不同。

不同窗函数也会给出相当不同的 $\sigma^2(R)$ 。观测上的三维星系分布满足 (文献 [1] 第 501 页; 文献 [2] 第 83 页)

$$\sigma_T^2(R) \approx 1.0 \quad (R = 8 h^{-1} \text{Mpc}). \quad (1.152)$$

在这些尺度附近, 相关函数斜率为

$$\gamma \approx 1.8, \quad \text{对应 } n = -1.2. \quad (1.153)$$

这一斜率在更大尺度上不再成立; 在 $R = 30 h^{-1} \text{Mpc}$ 处, $\sigma_T^2(R)$ 已降到 10^{-2} ($\sigma \sim 0.1$, 文献 [2] 第 83 页), 另见图 3。

也可以问, 比可观测宇宙更大的尺度是否相关, 即 k 积分中的下限 $k = 0$ 或 $\ln k = -\infty$ 是否有意义, 因为我们无法在这些尺度上观测不均匀性。由于这类超大尺度不均匀性, 可观测宇宙的平均密度可能偏离整个宇宙的平均密度。略大于可观测宇宙的尺度上的不均匀性, 可能表现为可观测宇宙中的各向异性。这些大尺度的重要程度取决于该尺度上不均匀性的强弱, 即功率谱在 $k \rightarrow 0$ 时的行为。

练习。 我们将 $\sigma^2(R)$ 定义为系综期望值。将 $\hat{\sigma}^2(R)$ 定义为单个实现上的体积平均, 并证明

$$\hat{\sigma}^2(R) \equiv \frac{1}{V} \int_V d^d x \hat{\delta}(\mathbf{x}, R)^2 = \frac{V}{(2\pi)^d} \int d^d k |\hat{\delta}_{\mathbf{k}}|^2 W(k)^2. \quad (1.154)$$

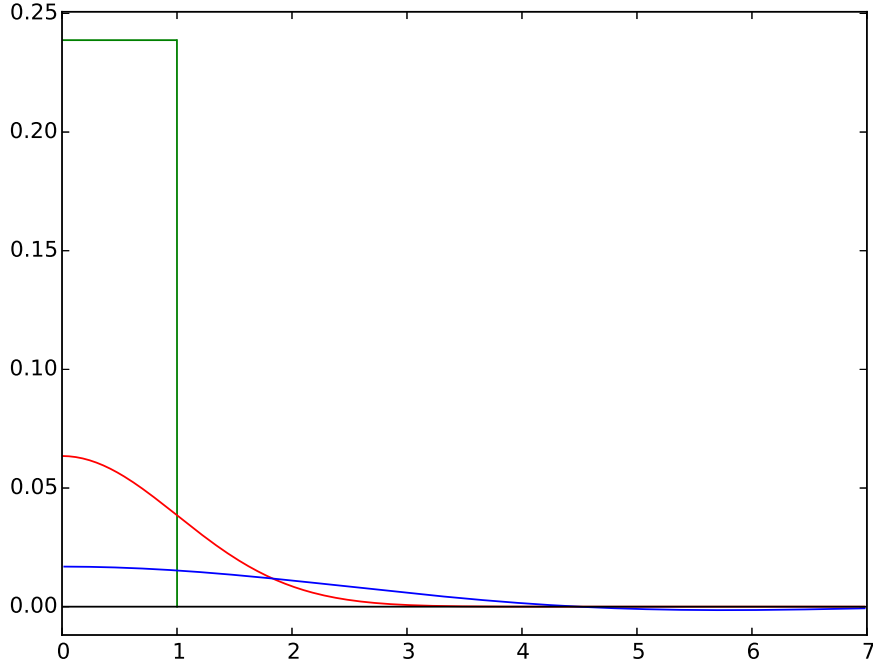


图 7: $R = 1$ 时的三维窗函数 $W(r)$: 顶帽 (绿色)、高斯 (红色) 与 k 空间顶帽 (蓝色)。

练习。 对于幂律谱与高斯窗函数, 证明

$$\sigma_G^2(R) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+d}{2}\right) \mathcal{P}(R^{-1}). \quad (1.155)$$

练习。 对于幂律谱与 k 空间顶帽窗函数, 证明

$$\sigma_k^2(R) = \frac{1}{n+d} \mathcal{P}(R^{-1}). \quad (1.156)$$

例。 我希望对顶帽窗函数也作相同计算, 尤其是考虑到式 (1.152)。不同 d 的情形似乎不同, 因此先尝试三维:

$$\begin{aligned} \sigma_T^2(R) &= \int_0^\infty \mathcal{P}(k) W_T(k)^2 \frac{dk}{k} = A^2 k_p^{-(n+3)} \int_0^\infty k^{n+3} \left(\frac{3}{kR}\right)^2 j_1^2(kR) \frac{dk}{k} \\ &= 9A^2 (k_p R)^{-(n+3)} \int_0^\infty x^n j_1^2(x) dx = 9I_n \mathcal{P}(R^{-1}), \end{aligned} \quad (1.157)$$

其中

$$I_n = \int_0^\infty x^n j_1^2(x) dx. \quad (1.158)$$

我没能算出 I_n , 也没在积分表中找到。Wolfram Alpha 对 I_n 和 I_{-n} 都提示 “计算超时”, 但对于 $n = -1.2$, 它给出了一个引人注目的结果:

$$I_{-1.2} = \frac{125\sqrt{5+\sqrt{5}}\Gamma(4/5)}{1386 \times 2^{3/10}} \approx 0.229418. \quad (1.159)$$

对于 $n = -1.2$ ($\gamma = 1.8$), 这给出 $\sigma_T^2(R) = 2.0648\mathcal{P}(R^{-1})$, 大得出乎意料, 因为另外两类窗函数给出 $\sigma_G^2(R) = 0.5343\mathcal{P}(R^{-1})$ 和 $\sigma_k^2(R) = 0.5556\mathcal{P}(R^{-1})$ 。事实上, 尽管两类窗函数的体积差异很大,

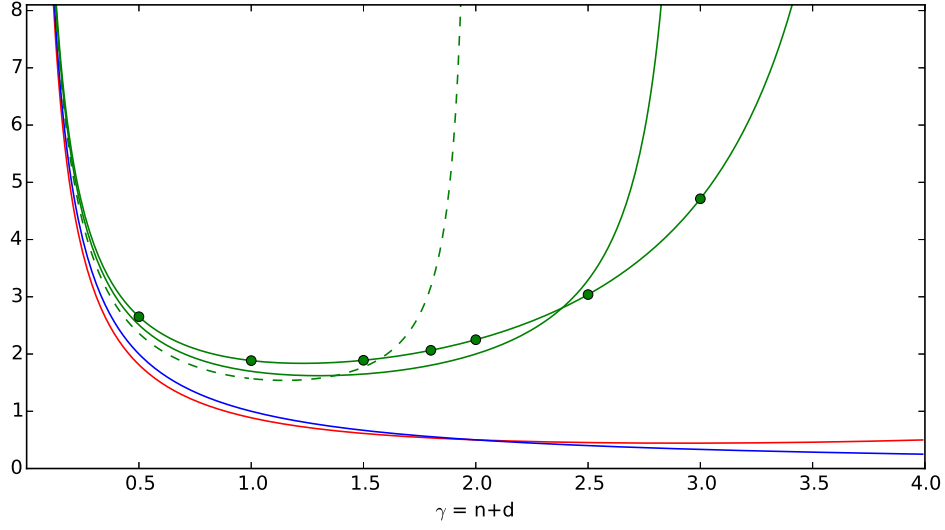


图 8: 对于幂律谱 $\mathcal{P}(k) \propto k^{n+d}$, 三类窗函数给出的 $\sigma^2(R)/\mathcal{P}(R^{-1})$: 高斯 (红色)、 k 空间顶帽 (蓝色)、一维顶帽 (绿色虚线)、二维顶帽 (绿色) 和三维顶帽 (带圆点的绿色)。由于越来越大尺度 ($\ln k \rightarrow -\infty$) 的贡献, 在 $n \rightarrow -d$ ($\gamma \rightarrow 0$) 时它们都发散。顶帽窗函数在 $n \rightarrow 1$ 处的发散更为微妙, 原因是它们的傅里叶变换在高 k 处衰减得不够快。

σ_G^2 与 σ_k^2 却如此接近, 这也让我同样惊讶。如果 σ_G^2 位于 σ_k^2 和 σ_T^2 之间, 我本来就会觉得很自然。我认为原因在于傅里叶变换 $W_T(k)$ 在高 k 处衰减得不够快; 对于较大的 $n+d$, 小尺度上有很多功率, 使远小于 R 的尺度仍持续贡献于 $\sigma_T^2(R)$ 。应用到星系数密度时, 星系间的有限间距会引入另一种截断, 因此这一高 k 尾部的效应可能不会完全体现出来……

最终, 用 Wolfram Alpha 处理三维情形的办法是将 n 的范围限制为 $n < 0$ 和 $n < -1$ 。得到

$$I_n = \int_0^\infty x^n j_1^2(x) dx = 2^{-n} \frac{(n+1)\Gamma(n-1)}{n-3} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (-3 < n < 0). \quad (1.160)$$

我只是猜测该结果在 $0 < n < 1$ 时也成立; 它在 $n \rightarrow 1$ 时发散, 见图 8。这一表达式在整数 n 处没有定义; 此时有 (用 Wolfram Alpha 很容易得到)

$$I_{-2} = \frac{\pi}{15}, \quad I_{-1} = \frac{1}{4}, \quad I_0 = \frac{\pi}{6}. \quad (1.161)$$

接下来是一维情形:

$$\sigma_T^2(R) = A^2(k_p R)^{-(n+1)} \int_0^\infty x^{n-2} \sin^2 x dx = I_n \mathcal{P}(R^{-1}), \quad (1.162)$$

其中

$$I_n = \int_0^\infty x^{n-2} \sin^2 x dx. \quad (1.163)$$

它在 $n \leq -1$ 时于 $x \rightarrow 0$ 发散, 在 $n \geq 1$ 时于 $x \rightarrow \infty$ 发散。Gradshteyn 和 Ryzhik [9] 的式 3.821.9 给出 $I_0 = \pi/2$ 。Wolfram Alpha 给出

$$\begin{aligned} I_n &= 2^{-n} \sin \frac{n\pi}{2} \frac{\Gamma(n)}{1-n}, & 0 < n < 1, \\ I_n &= 2^{-n} \sin \left(-\frac{n\pi}{2}\right) \frac{\Gamma(n+1)}{n(n-1)}, & -1 < n < 0. \end{aligned} \quad (1.164)$$

对于 $n + 1 = 1.8$ ，得到 $\sigma_T^2(R) = 3.1797\mathcal{P}(R^{-1})$ ，比三维情形还大。

接下来是二维情形：

$$\sigma_T^2(R) = 4I_n\mathcal{P}(R^{-1}), \quad I_n = \int_0^\infty x^{n-1}J_1(x)^2 dx. \quad (1.165)$$

Wolfram Alpha 计算超时，但 Gradshteyn 和 Ryzhik [9] 的式 6.574.2 给出

$$I_n = \frac{\Gamma(1-n)\Gamma(1+n/2)}{2^{1-n}\Gamma(1-n/2)^2\Gamma(2-n/2)} \quad (n < 1). \quad (1.166)$$

图 8 比较了不同窗函数的这些结果。

2 星系分布

现在不再考虑连续密度 $\rho(\mathbf{x})$ ，而改为考虑离散天体的分布。它们的数密度 $\rho(\mathbf{x})$ 只能在有限分辨率下定义。¹⁶分辨率取决于应用：第 2.3 和 2.4 节的元胞计数方法分辨率较低，第 2.5 节的微胞方法分辨率较高；但无论如何，我们都远未达到无穷分辨率，对于点状天体，这一极限将导致 δ 函数，而真实星系并不是点状的。为使讨论不那么抽象，我们把这些天体称为星系；实际上，它们也可以是其他宇宙学天体，例如星系团。另一个应用是数值方法中用点质量分布表示连续密度场。

2.1 星系的平均数密度

常有人说，可观测宇宙约包含 2000 亿 (2×10^{11}) 个星系。若将可观测宇宙理解为一直到最后散射面，即宇宙微波背景的起源处，则其红移为 $z = 1090$ ，共动距离为 $r \approx 3.1H_0^{-1} = 9300 h^{-1}\text{Mpc}$ ，共动体积为

$$V = \frac{4\pi}{3}r^3 \approx 3400 h^{-3}\text{Gpc}^3 = 3.4 \times 10^{12} h^{-3}\text{Mpc}^3. \quad (2.1)$$

然而，在这里，可观测宇宙指的是我们实际上能够观测星系的距离范围。若取 $z = 8$ ，对应 $r \approx 2.05H_0^{-1} = 6100 h^{-1}\text{Mpc}$ ，则可观测体积为

$$V_{\text{obs}} \approx 970 h^{-3}\text{Gpc}^3 = 9.7 \times 10^{11} h^{-3}\text{Mpc}^3. \quad (2.2)$$

若星系数 $N_g = 2 \times 10^{11}$ ，则共动平均星系数密度为

$$\bar{\rho}_g = \frac{N_g}{V_{\text{obs}}} \approx \frac{0.21}{h^{-3}\text{Mpc}^3}. \quad (2.3)$$

我们的过去光锥。 在式 (2.2) 和 (2.3) 中，我把可观测宇宙限制在 $z \leq 8$ ，忽略了演化效应，即更高红移对应更早时刻，以得到对应某个较近时刻 $t = \text{const}$ 的均匀星系平均数密度。但更合适的定义，是令可观测宇宙对应我们的过去光锥，一直延伸至 $z = 1090$ ；其中包含的星系，是世界线与这一光锥相交的那些星系。最近我读到，按这种方式定义的可观测宇宙，其星系数比上述估计大十倍，因为早期宇宙中的星系小得多，后来通过并合形成较大的星系，使共动星系数密度下降。因此，式 (2.3) 适用于晚期宇宙，而早期宇宙的数密度高出十倍以上。该网页¹⁷链接了 Conselice 等人一篇论文的草稿 [18]，图 9 即来自该文。由于上述演化效应，共动星系数密度最初随 z 增大而升高，但当回溯到

¹⁶MBW [2] 第 6.1.2 节采用了更复杂的处理：考虑一个分两步的随机过程，第一个过程产生连续密度场 $\rho(\mathbf{x})$ ，第二个过程产生它的点质量表示。这样做的优点是无需担心 dV 小于 $\rho(\mathbf{x})$ 的分辨率。他们也使用了遍历性，但若采用 $\langle \rho \rangle$ 而非 $\bar{\rho}$ ，似乎不需要这一假设。

¹⁷<https://www.nasa.gov/feature/goddard/2016/hubble-reveals-observable-universe-contains-10-times-more-galaxies-than-previously-thought>

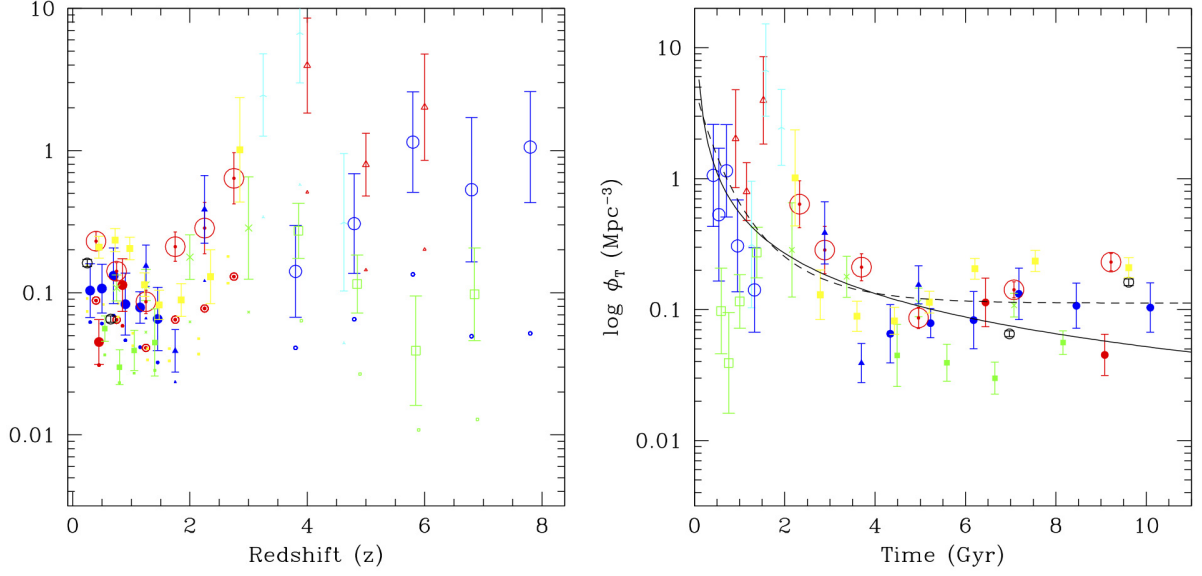


图 9: 共动总星系数密度 ϕ_T 随红移和时间的演化 [18]。带误差棒的符号表示不同巡天的结果。右图实线为数据点的拟合, 虚线为星系并合模型对数据的拟合。图中假设 $h = 0.7$, 因此换算为 $h^3 \text{Mpc}^{-3}$ 单位时, 应将纵轴数值乘以 $h^{-3} = 2.9$; 这里指 ϕ_T 的数值, 而非 $\log \phi_T$ 。

大多数星系尚未形成的时代时, 就开始下降。这大概发生在 $z \sim 8$ 附近, 但如此高红移处的数据还不够好。

重子密度为 $\bar{\rho}_b = \Omega_b \rho_{\text{crit}0} = \omega_b h^{-2} \rho_{\text{crit}0}$, 其中 $\omega_b = 0.022$ [19], 得到

$$\bar{\rho}_b = 6.1 \times 10^9 m_\odot \text{Mpc}^{-3}. \quad (2.4)$$

取 $h = 0.7$, 则在晚期宇宙中, 每个星系对应的重子物质为

$$\frac{\bar{\rho}_b}{\bar{\rho}_g} = 8.6 \times 10^{10} m_\odot = 1.7 \times 10^{41} \text{kg}. \quad (2.5)$$

总物质密度参数为 $\omega_m = 0.14$ [19], 由此每个星系对应 $5.5 \times 10^{11} m_\odot$ 的总物质, 包括重子与冷暗物质。根据文献 [2] 第 62 页的表 2.6, 在近邻宇宙中, 矮星系数目约为旋涡星系的十倍; 其他类型星系的总数约为旋涡星系的一半。矮星系定义为绝对星等 $M_B \gtrsim -18$ 的星系, 因此它们在数量上占绝大多数, 尽管所含恒星只占全部恒星的较小部分 (文献 [2], 第 57 页)。观测越远, 星系需要具有越高的绝对光度, 即越小的绝对星等, 才可能被观测到。因此, 可观测星系的数密度小于式 (2.3), 并随距离下降。

对于天空中的二维星系数密度, 可以给出更明确的数字: Euclid 广域巡天将覆盖 $\Omega = 15000$ 平方度, 即全天的 36.36%, 预期观测 15 亿个星系 ($N_g = 1.5 \times 10^9$), 其视星等 $m < 24.5$, 且观测质量足以将星系形状用于弱引力透镜统计 [20]。这对应二维密度

$$\bar{\rho}_{g,\text{Euclid}} = \frac{N_g}{\Omega} \approx \frac{30}{\text{arcmin}^2}. \quad (2.6)$$

这些星系大多位于 $z \lesssim 2$, 对应 $r \lesssim 2H_0^{-1}$ 或 $V \approx 190 h^{-3} \text{Gpc}^3$, 约为到 $z = 8$ 体积的五分之一。将“Euclid 体积”定义为天空中 15000 平方度、延伸到 $z = 2$ 的区域, 则

$$V_{\text{Euclid}} \approx 70 h^{-3} \text{Gpc}^3. \quad (2.7)$$

其中应含约 140 亿个星系, 因此 Euclid 将遗漏其中的大部分。

检验这三个来源 [18, 2, 20] 的数字是否相互一致：将最亮矮星系的绝对星等 $M = -18$ 与 Euclid 广域巡天深度 $m = 24.5$ 比较，可知在距离模数 $m - M = 42.5 = -5 + 5 \lg d_L [\text{pc}]$ 之外，即使最亮的矮星系也无法看到。这给出 $d_L = 10^{9.5} \text{pc} \approx 3.16 \text{Gpc}$ 。取 $h = 0.7$ ，则 $d_L = 2.2 h^{-1} \text{Gpc} = 0.74 H_0^{-1}$ ，对应 $z \approx 0.55$ 。（平直宇宙中，光度距离与共动距离的关系为 $d_L = (1+z)r$ ，故对应 $r \approx 0.48 H_0^{-1}$ 。）因此，Euclid 广域巡天应能在 $z < 0.55$ 看到一些矮星系，而在 $z > 0.55$ 看不到矮星系，并且还会遗漏部分较大的星系。这似乎与它从 V_{Euclid} 中总共 140 亿个星系里观测到 15 亿个相一致。

2.2 星系两点相关函数

将每个星系视为一个数学点，具有坐标 $\mathbf{x}$ 。定义星系两点相关函数 $\xi(r)$ ，用以描述距另一星系间隔 r 处找到一个星系的超出随机分布的概率：

$$dP \equiv \langle \rho \rangle [1 + \xi(r)] dV, \quad (2.8)$$

其中 $\langle \rho \rangle$ 是星系数密度的系综平均， dV 是距所选参考星系间隔 r 的体积元， dP 是在 dV 内存在一个星系的概率。

在随机位置 $\mathbf{x}$ 处的体积 dV_1 内找到一个星系的概率为

$$dP_1 = \langle \rho(\mathbf{x}) \rangle dV_1 = \langle \rho \rangle \langle 1 + \delta(\mathbf{x}) \rangle dV_1 = \langle \rho \rangle dV_1. \quad (2.9)$$

在 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ 处找到一对星系的概率为

$$\begin{aligned} dP_{12} &= \langle \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle dV_1 dV_2 = \langle \rho \rangle^2 \langle [1 + \delta(\mathbf{x})][1 + \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r})] \rangle dV_1 dV_2 \\ &= \langle \rho \rangle^2 [1 + \langle \delta(\mathbf{x}) \rangle + \langle \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle + \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle] dV_1 dV_2 \\ &= \langle \rho \rangle^2 [1 + \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle] dV_1 dV_2, \end{aligned} \quad (2.10)$$

因为 $\langle \delta(\mathbf{x}) \rangle = \langle \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = 0$ 。以 dP_{12} 除以 dP_1 ，就得到已找到第一个星系时，找到第二个星系的概率：

$$dP_2 = \langle \rho \rangle [1 + \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle] dV_2. \quad (2.11)$$

比较式 (2.11) 与 (2.8)，可见新的 ξ 定义与此前一致：

$$\xi(r) = \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle. \quad (2.12)$$

因此，对于任一星系， $\langle \rho \rangle [1 + \xi(r)] dV$ 是与其相隔 r 的体积元 dV 内的预期星系数。球壳内的平均邻近星系数为

$$dN(r) = \langle \rho \rangle [1 + \xi(r)] C_d r^{d-1} dr, \quad (2.13)$$

距离 R 以内的平均邻近星系数为

$$N(R) = \langle \rho \rangle V(R) + \langle \rho \rangle \int_0^R \xi(r) C_d r^{d-1} dr = \langle \rho \rangle V(R) [1 + \bar{\xi}(R)]. \quad (2.14)$$

因此， $1 + \xi(r)$ 可解释为每个星系周围的平均（预期）密度轮廓。

2.3 泊松分布

泊松分布是一种无相关的星系分布：独立地给每个星系 i 分配随机位置 $\mathbf{x}_i$ ，在 V 内采用均匀概率密度，即得到这种分布。这一过程称为泊松过程。此时

$$dP_{12} = \langle \rho \rangle^2 dV_1 dV_2 \Rightarrow \xi(r) = 0. \quad (2.15)$$

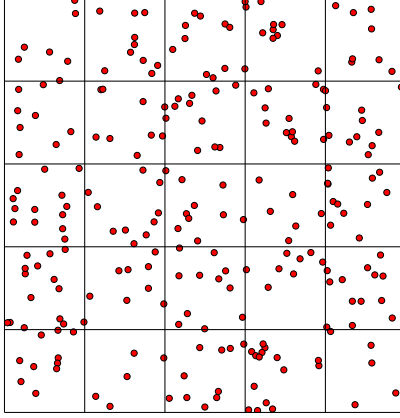


图 10: $N = 250$ 个星系的泊松分布。二维体积分成 $M = 25$ 个元胞，因此每个元胞平均应含 10 个星系。其中有两个元胞只有 5 个星系。

将体积 V 分成 M 个子体积（元胞） ΔV ，并通过泊松过程将 N 个星系放入 V ，见图 10。每个星系落入某个给定元胞的概率是 $p = 1/M$ ，落在别处的概率为 $1 - p = 1 - 1/M$ 。因此，前 n 个星系落入该元胞、其余 $N - n$ 个落在别处的概率为 $(1/M)^n (1 - 1/M)^{N-n}$ 。从 N 个星系中选取 n 个的方式数为

$$\binom{N}{n} \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!}, \quad (2.16)$$

故某个元胞内恰有 n 个星系的概率为

$$P(n) = \binom{N}{n} \left(\frac{1}{M}\right)^n \left(1 - \frac{1}{M}\right)^{N-n}. \quad (2.17)$$

这是二项式展开

$$(a + b)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} a^n b^{N-n} \quad (2.18)$$

的第 n 项，因此容易检验总概率为

$$\sum_{n=0}^N P(n) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \left(\frac{1}{M}\right)^n \left(1 - \frac{1}{M}\right)^{N-n} = \left[\frac{1}{M} + \left(1 - \frac{1}{M}\right)\right]^N = 1^N = 1. \quad (2.19)$$

整数的概率分布 (2.17) 称为二项分布 $B(N, p)$ ，其中 $p = 1/M$ 。泊松极限定理指出，若 $N \rightarrow \infty$ 、 $p \rightarrow 0$ ($M \rightarrow \infty$)，且 $Np = N/M \rightarrow \lambda$ ，即保持元胞大小固定并增大巡天体积，则

$$P(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \rightarrow \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \left(\frac{N}{M}\right)^n \frac{e^{-N/M}}{n!}. \quad (2.20)$$

这一整数概率分布称为泊松分布。

对于泊松分布，下列期望值为（练习）

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n P(n) = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda = N/M, \\ \langle n^2 \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(n) = \dots = \lambda + \lambda^2, \\ \langle (\Delta n)^2 \rangle &\equiv \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \lambda. \end{aligned} \quad (2.21)$$

元胞内的星系密度为 $\rho(\mathbf{x}) = n/\Delta V$ ，密度扰动为 $\delta(\mathbf{x}) = (n - \langle n \rangle)/\langle n \rangle$ ，从而

$$\langle \delta^2 \rangle = \frac{\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle}{\langle n \rangle^2} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\langle n \rangle}. \quad (2.22)$$

后面第 8 节将称其为泊松方差：相对方差等于预期点数的倒数。因此，尽管泊松分布在 $r \neq 0$ 处满足 $\xi(r) = 0$ ，仍有

$$\xi(0) = \langle \delta^2 \rangle = \frac{M}{N} = \frac{1}{\langle n \rangle} \quad (2.23)$$

(在 N 和 M 都很大的极限下)。这一密度方差依赖于分辨率：固定 V 和星系数 N ，增大元胞数 M 、即减小 ΔV ，会使方差增大。

注意，上述讨论固定了 N ，对应 $\bar{\rho} = \langle \rho \rangle$ 的子系综。还应该允许 N 改变，想来它也服从泊松分布 $P(N) = \lambda^N e^{-\lambda}/N!$ ，此处 $\lambda = \langle N \rangle = \langle \rho \rangle V$ （待补）。

可以继续沿用这一方法，令 V 为立方体，将 M 个元胞的划分取为矩形网格，用 M^d 替换 M ，再进行离散傅里叶变换，求得泊松分布的功率谱：

$$P(k) = \text{const.} \quad (2.24)$$

不过，这似乎不是文献中的常见处理，所以我原本跳过了它，以避免讨论离散傅里叶变换。（更新：现在已在下面补入。）仍可对结果作一些说明：泊松分布具有白噪声功率谱， $n = 0$ ，其振幅依赖于分辨率。第 1.9 节指出，当 $n \rightarrow 0$ 时 $\gamma \rightarrow d$ 。现在， $r \neq 0$ 时 $\xi(r) = 0$ ，但固定 V 和 N 时， $\xi(0) \propto (\Delta r)^{-d}$ ，其中 Δr 为元胞边长，即 $\Delta V = (\Delta r)^d$ 。

离散傅里叶变换。 为简单起见，这里只处理一维。我将这段内容用小字排版，因为第 2.5 节还会介绍另一种对离散天体集合进行傅里叶变换的方法。尽管是一维，在转入离散记号前，我仍用矢量记号表示一维矢量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{k}$ ；转入离散记号后，它们分别由整数 j 和 k 替代。将一维体积记作长度 L ，分成 M 个大小为 Δ 的元胞，故 $L = M\Delta$ 。为方便起见，令 M 为偶数。以 $j = 0, \dots, M-1$ 为元胞编号，则第 j 个元胞位于 $x_j = j\Delta$ 。可以假设它指元胞中心，即将坐标原点放在第一个元胞中心，使“巡天”从 $-\frac{1}{2}\Delta$ 延伸到 $L - \frac{1}{2}\Delta$ 。第 j 个元胞的密度扰动为

$$\delta(x_j) = \delta(j\Delta) \equiv \delta_j = \frac{n_j - \langle n \rangle}{\langle n \rangle}, \quad (2.25)$$

其中 n_j 是该元胞中的星系数。

连续函数的傅里叶系数为

$$\delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{L} \int \delta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (2.26)$$

波矢（波数） $\mathbf{k}$ 的允许值为 $k(2\pi/L)$ ，其中 k 是整数。现在，用求和替代积分：

$$\delta_k = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{M-1} \delta_j e^{-ij\Delta k(2\pi/L)} \Delta = \frac{\Delta}{L} \sum_{j=0}^{M-1} \delta_j e^{-i2\pi jk/M}, \quad (2.27)$$

其中 $\Delta/L = 1/M$ 。

离散化对可分辨的傅里叶模施加上限：最大 k 对应波长 2Δ ，

$$k_{\max} \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{2\Delta} = \frac{\pi}{\Delta} \Rightarrow k_{\max} = \frac{L}{2\Delta} = \frac{M}{2}, \quad (2.28)$$

允许值为

$$k = -\frac{1}{2}M, -\frac{1}{2}M + 1, \dots, \frac{1}{2}M. \quad (2.29)$$

由于 $\exp(-i2\pi jk/M)$ 关于 k 具有周期性, 即 $k+M$ 与 k 给出相同值, 始终可以用 $k+M$ 或 $k-M$ 替代 k 。此外, $k = -\frac{1}{2}M$ 与 $k = \frac{1}{2}M$ 的模看起来相同, 因此只有 M 个不同的模。于是可以用更方便的范围

$$k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.30)$$

替代式 (2.29)。

不同傅里叶模正交 (练习):

$$\sum_{k=0}^{M-1} e^{i2\pi(j-j')k/M} = M\delta_{jj'}. \quad (2.31)$$

由此容易证明 (练习)

$$\delta_j = \sum_{k=0}^{M-1} \delta_k e^{i2\pi jk/M}. \quad (2.32)$$

式 (2.27) 与 (2.32) 构成离散傅里叶变换对。

现在可以计算

$$\begin{aligned} \langle \delta_k^* \delta_{k'} \rangle &= \frac{\Delta^2}{L^2} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{j'=0}^{M-1} \langle \delta_j \delta_{j'} \rangle e^{i2\pi(jk-j'k')/M} \\ &= \frac{\Delta^2}{L^2} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{r=0}^{M-1} \langle \delta_j \delta_{j+r} \rangle e^{-i2\pi jk/M} e^{i2\pi(j+r)k'/M} \\ &= \frac{\Delta^2}{L^2} \sum_{r=0}^{M-1} \xi_r e^{-i2\pi rk'/M} \sum_{j=0}^{M-1} e^{i2\pi j(k-k')/M} \\ &= \frac{\Delta}{L} \sum_{r=0}^{M-1} \xi_r e^{-i2\pi rk'/M} \delta_{kk'} \equiv \frac{1}{L} \delta_{kk'} P_k. \end{aligned} \quad (2.33)$$

这里依次做了四件事: 1) 写成 $j' = j + r$, 由于所有量都按模 M 循环, 整数 r 也可以取 0 到 $M-1$; 2) 利用统计均匀性, 定义 $\xi_r \equiv \langle \delta_j \delta_{j+r} \rangle$; 3) 使用式 (2.31); 4) 将功率谱 P_k 定义为 ξ_r 的离散傅里叶变换:

$$P_k \equiv \Delta \sum_{r=0}^{M-1} \xi_r e^{-i2\pi rk/M}. \quad (2.34)$$

式 (2.27) 与 (2.34) 形式上的差异, 即少了一个 L , 正是式 (1.57) 中的差异。对于 L 和 Δ 在定义中的位置, 也可以作其他选择。

对于泊松分布, 除

$$\xi_0 = M/L\langle\rho\rangle = \frac{1}{\Delta\langle\rho\rangle} = \frac{1}{\langle n \rangle} \quad (2.35)$$

外, $\xi_r = 0$, 从而

$$P_k = \frac{1}{\langle\rho\rangle} \quad \text{对所有 } k \text{ 均成立.} \quad (2.36)$$

练习: Cox 过程。 Cox 过程指两个泊松过程的组合。考虑以下例子:

1. 将无限长直线随机放入无穷体积中, 这是第一个泊松过程; 再将星系随机放到这些直线上, 这是第二个泊松过程, 使直线上的平均线数密度 (期望值) 为 λ 。用 λ 和最终的三维平均星系数密度 $\langle\rho\rangle$ 表示 $\xi(r)$ 。
2. 与上一情形相同, 但线段长度有限, 均为 L 。用 λ 、 L 以及线段数密度 n_s 表示 $\xi(r)$ 。

答案为:

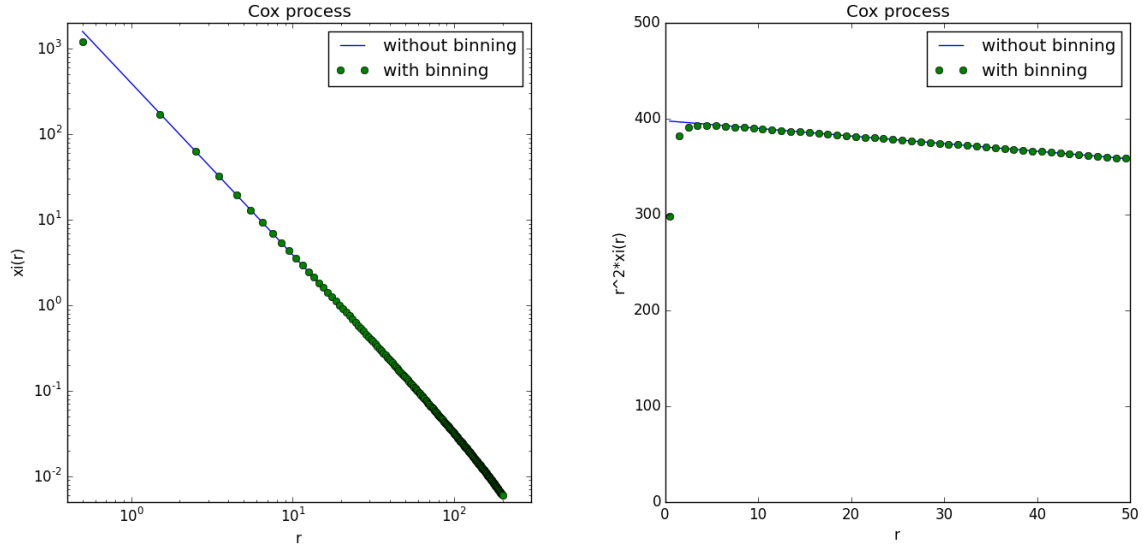


表 2: $L = 500$ 、 $n_s = 8 \times 10^{-7}$ 、分箱宽度 $\Delta r = 1$ 时 Cox 过程的相关函数。左: $\xi(r)$ 的双对数图; 右: $r^2 \xi(r)$ 的双线性坐标图。

1.

$$\xi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\langle\rho\rangle} r^{-2}. \quad (2.37)$$

2.

$$\xi(r) = \frac{1}{2\pi n_s L r^2} \left(1 - \frac{r}{L}\right) \quad (r \leq L), \quad \xi(r) = 0 \quad (r > L). \quad (2.38)$$

注意, 这不依赖于 λ , 因为 $\langle\rho\rangle = n_s L \lambda$, 所以 λ 在比值 $\lambda/\langle\rho\rangle$ 中抵消。

Cox 过程已被用于生成模拟目录, 以测试估计 $\xi(r)$ 的程序。要生成恰好具有某个已知非零相关函数 $\xi(r)$ 的测试目录, 使估计值能够与之比较, 实际上并不容易; Cox 过程提供了一种方法。

练习: 带分箱的 Cox 过程。 接上一个练习。从数据测量相关函数 $\xi(r)$ 时, 必须在有限宽度 Δr 的区间中计数。为了比较数据与理论, 我们不再询问间隔 r 处存在另一个星系的超额概率 $\xi(r)\langle\rho\rangle dV$, 其中 $dV = 4\pi r^2 dr$, 而是询问间隔位于 r_1 与 r_2 之间的超额概率 $\xi(r_1, r_2)\langle\rho\rangle \Delta V$, 其中 $\Delta r = r_2 - r_1$ 。求 $r_1 < r_2 \leq L$ 时的 $\xi(r_1, r_2)$ 。($r_1 \geq L$ 时 $\xi = 0$; $r_1 < L < r_2$ 时答案更复杂, 但很少需要。) 答案为:

1.

$$\xi(r_1, r_2) = \frac{\lambda}{2\pi\langle\rho\rangle} \frac{3(r_2 - r_1)}{r_2^3 - r_1^3} = \frac{\lambda}{2\pi\langle\rho\rangle} \frac{3}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}. \quad (2.39)$$

2.

$$\begin{aligned} \xi(r_1, r_2) &= \frac{1}{2\pi n_s L} \frac{3(r_2 - r_1)}{r_2^3 - r_1^3} \left(1 - \frac{r_1 + r_2}{2L}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi n_s L} \frac{3}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2} \left(1 - \frac{r_1 + r_2}{2L}\right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.4 元胞计数

测量星系成团性质的早期方法之一，是将巡天体积 V 划分成大小 ΔV 和形状都相同的元胞（子体积），并统计每个元胞中的星系数 n 。定义

$$\Delta n \equiv n - \langle n \rangle, \quad (2.41)$$

方差

$$\mu_2 \equiv \langle (\Delta n)^2 \rangle, \quad (2.42)$$

以及偏度

$$\mu_3 \equiv \langle (\Delta n)^3 \rangle. \quad (2.43)$$

对于完全随机、即泊松分布的星系，有

$$\mu_2 = \mu_3 = \langle n \rangle. \quad (2.44)$$

成团分布具有更大的方差。定义

$$y \equiv \frac{\mu_2 - \langle n \rangle}{\langle n \rangle^2} \quad (2.45)$$

作为成团的量度。可以证明

$$\langle y \rangle = \frac{\int_{\Delta V} \int_{\Delta V} \xi(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) d^d x_1 d^d x_2}{\Delta V^2}. \quad (2.46)$$

类似地，定义

$$z \equiv \frac{\mu_3 - 3\mu_2 + 2\langle n \rangle}{\langle n \rangle^3} \quad (2.47)$$

衡量成团的超额偏度。它度量结构增长中的非线性效应和原初扰动的非高斯性。

对于实际巡天，以巡天平均替换期望值，定义对应的 $\hat{\mu}_2$ 、 $\hat{\mu}_3$ 、 $\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 。注意，这些是有偏估计量， $\langle \hat{y} \rangle \neq y$ 、 $\langle \hat{z} \rangle \neq z$ ，因为取期望与平方、立方及除法运算不可交换。使用更大或更小的元胞，可以研究结构的尺度依赖。在相关函数很小的尺度上，这种方法比估计相关函数更适于探测结构。

这一方法的重要改进是，不再使用互不重叠的元胞，而是在巡天内的随机位置布置更多大小相同的元胞 ΔV ，允许它们相互重叠。这种过采样不改变由式 (2.46) 确定的预期方差，但会使测得的方差更接近期望值 [14, 15]。

2.5 离散天体集合的傅里叶变换

用离散天体集合替代连续密度场时，描述的分辨率已经降低。标准离散傅里叶变换方法引入有限分辨率的矩形网格，又造成一次独立的、并不必要的分辨率损失。若只把星系分配到有限大小的元胞中，就会丢失其精确位置信息。我们只需引入问题本身固有的离散性，即离散点集的离散性；这通过微胞（microcell）实现。

起初像通常的离散傅里叶变换一样，将体积划分为元胞。但现在令元胞远小于星系分布的尺度，使一个元胞中存在多于一个星系的概率变为零；于是指定星系 i 所在的元胞，就指定了它的“精确”位置 $\mathbf{x}_i$ 。将微胞体积记作 δV 。大多数微胞为空。微胞 j 中的星系数密度为 $n_j/\delta V$ ，其中 $n_j = 0$ 或 1，因此 $n_j^2 = n_j$ ，这一点后面会很有用。

密度场的傅里叶系数变为

$$\rho_{\mathbf{k}} = \frac{1}{V} \int_V \rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^d x = \frac{1}{V} \sum_j (n_j/\delta V) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \delta V = \frac{1}{V} \sum_j n_j e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j}, \quad (2.48)$$

求和遍历微胞， $\mathbf{x}_j$ 为微胞位置。所有空微胞都有 $n_j = 0$ ，只有含星系的微胞，即 $n_j = 1$ 的项留下，因此求和变为对星系求和：

$$\rho_{\mathbf{k}} = \frac{1}{V} \sum_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i}, \quad (2.49)$$

其中 $\mathbf{x}_i$ 是星系 i 的位置。因此

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{k}} &= \frac{\rho_{\mathbf{k}}}{\langle \rho \rangle} = \frac{1}{\langle \rho \rangle V} \sum_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} = \frac{1}{\langle N \rangle} \sum_{i=1}^N e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} \quad (\mathbf{k} \neq 0), \\ \delta_0 &= \bar{\delta} = \frac{\bar{\rho}}{\langle \rho \rangle} - 1 = \frac{N - \langle N \rangle}{\langle N \rangle}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

N 为体积 V 中的星系总数，其期望值为 $\langle N \rangle = \langle \rho \rangle V$ 。

2.5.1 再论泊松分布

现在将新的傅里叶方法用于泊松分布。位置 $\mathbf{x}_i$ 是彼此独立的随机数，因此式 (2.50) 中的复数 $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i}$ 随机分布在复平面的单位圆上。于是，求和 $\sum_{i=1}^N e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i}$ 相当于在复平面进行步长为 1 的随机游走。

为求功率谱，计算

$$\begin{aligned} |\delta_{\mathbf{k}}|^2 &= \delta_{\mathbf{k}}^* \delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\langle N \rangle^2} \sum_{ij} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} = \frac{1}{\langle N \rangle^2} \left(\sum_{i \neq j} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} + \sum_i 1 \right) \\ &= \frac{1}{\langle N \rangle^2} \left(2 \sum_{\text{点对}} \cos[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)] + N \right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

$\cos[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)]$ 取正值和负值的概率相等，故第一项的期望为零，得到

$$P(k) = V \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = V \frac{\langle N \rangle}{\langle N \rangle^2} = \frac{V}{\langle N \rangle} = \frac{1}{\langle \rho \rangle}. \quad (2.52)$$

它与 k 无关，即谱指数 $n = 0$ 。

第 9.1 节将对有相关的分布重复这一计算；届时会看到，用离散星系集合替代连续密度，会在功率谱中增加 $V/\langle N \rangle = 1/\langle \rho \rangle$ 这一项，称为散粒噪声 (shot noise)。点的密度，即巡天所含星系的数密度越高，散粒噪声越小。要估计其背后质量分布的功率谱，需要减去这一散粒噪声。

$\hat{P}(k)$ 的概率分布。 后面将更详细地讨论如何从星系巡天估计功率谱，但现在先考虑单个实现与期望值之间的差别，即

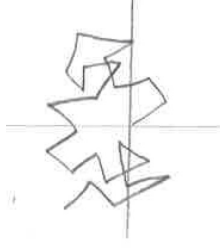
$$\hat{P}(k) \equiv V |\hat{\delta}_{\mathbf{k}}|^2 \quad (2.53)$$

如何分布在期望值 $P(k)$ 周围。假设 N 固定，但可以不同于 $\langle N \rangle$ ；这里不再叠加 N 的概率分布。将复数 $\hat{\delta}_{\mathbf{k}}$ 看成二维矢量：

$$\hat{\delta}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} = \frac{1}{N} \left(\sum_i \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i), -\sum_i \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i) \right), \quad (2.54)$$

它指向随机游走的终点，或者说 $N\hat{\delta}_{\mathbf{k}}$ 指向终点。考虑 $\hat{\delta}_{\mathbf{k}}$ 的实部：

$$\frac{1}{N} \sum_i \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i). \quad (2.55)$$



求和中的各项是独立随机变量，服从非均匀概率分布； $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i$ 服从均匀概率分布。¹⁸

应用中心极限定理：当 $N \rightarrow \infty$ 时，独立随机变量的和或平均值趋近于正态（高斯）分布，

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad (2.56)$$

其中 μ 是期望值， σ^2 是方差，而不论各个变量自身服从何种概率分布。如果每个变量具有相同的概率分布，期望为 μ 、方差为 σ^2 ，则它们的平均值期望仍为 μ ，方差为 σ^2/N 。

$\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i)$ 的期望为零，方差为 $(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = 1/2$ 。因此 $\text{Re} \hat{\delta}_{\mathbf{k}}$ 的概率分布为

$$P(\text{Re} \hat{\delta}_{\mathbf{k}} = x) = \sqrt{\frac{N}{\pi}} e^{-Nx^2}. \quad (2.57)$$

虚部具有相同的概率分布。显然，实部与虚部是相关的。单个项完全相关，因为 $\sin = \sqrt{1 - \cos^2}$ 。求和后仍保留部分相关，尤其是在大 $|\hat{\delta}_{\mathbf{k}}|$ 的概率分布尾部。显然，若实部接近其可能的最大值，即 $\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i)$ 大多接近 1，虚部就必须很小，反之亦然。不过，远离尾部时，可以预期这两个和，即随机游走的两个分量之间的相关可忽略。作此近似，¹⁹便得到二维概率分布

$$P(\hat{\delta}_{\mathbf{k}}) = \frac{N}{\pi} e^{-N|\hat{\delta}_{\mathbf{k}}|^2}. \quad (2.58)$$

要将其转换为 $|\hat{\delta}_{\mathbf{k}}|^2$ 的概率分布，需要积分。先求

$$P(|\hat{\delta}_{\mathbf{k}}| = r) dr = N e^{-Nr^2} 2r dr. \quad (2.59)$$

这称为瑞利分布（Rayleigh distribution）。令 $s = |\hat{\delta}_{\mathbf{k}}|^2 = r^2$ ，则 $ds = d(r^2) = 2r dr$ ，所以

$$P(|\hat{\delta}_{\mathbf{k}}|^2 = s) ds = N e^{-Ns} ds, \quad (2.60)$$

以及

$$P(|\hat{\delta}_{\mathbf{k}}|^2 > s) = N \int_s^\infty e^{-Ns} ds = e^{-Ns}. \quad (2.61)$$

这一分布的均值是 $1/N$ ，方差是 $2/N^2$ ，即

$$\langle \hat{P}(k) \rangle = \frac{V}{N} = \frac{1}{\bar{\rho}}, \quad \left\langle \left(\hat{P}(k) - \langle \hat{P}(k) \rangle \right)^2 \right\rangle = 2 \left(\frac{V}{N} \right)^2 = \frac{2}{\bar{\rho}^2}. \quad (2.62)$$

因此，尽管 $\hat{P}(k)$ 的期望值与 $P(k)$ 一致，它周围的方差却很大，最可能的值实际上是 $\hat{P}(k) = 0$ ！但要注意，这是单个傅里叶模 $\mathbf{k}$ 的情况。从巡天估计 $P(k)$ 时，会对大量满足 $k \leq |\mathbf{k}| \leq k + dk$ 的傅里叶模取平均，其平均值的方差会小得多。

要得到 N 的概率分布，只需使用式 (2.20)，把完整体积 V 视为无穷宇宙的一个子体积，即用 N 替代 n ：

$$P(N) = \langle N \rangle^N \frac{\exp^{-\langle N \rangle}}{N!}. \quad (2.63)$$

¹⁸Elina Keihänen 评论：我认为除一维外， $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ 并不服从均匀分布。它是三个项 $k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3$ 的和，每一项单独都均匀分布，但它们的和不是。令人惊讶的是，式 (2.57) 似乎仍然成立。我做了数值检验。

¹⁹Peacock [1] 没有提到这样的近似，也许它包含在 $N \gg 1$ 极限之中；但我需要这一近似，才能得到他的式 (16.115)，也就是这里的式 (2.61)。

3 低维子空间

现在考虑一维或二维子空间中的统计量与完整三维空间中的统计量有何关系。这里一个关键的出发点是：由于统计各向同性，无论是否将 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ 限制在一条一维直线或一个二维平面上，相关函数

$$\xi(r) = \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (3.1)$$

都相同。

3.1 一维截线

考虑穿过三维空间的一条直线（“一维截线”，skewer）上的功率谱 $\mathcal{P}_{1D}(k)$ 。由于

$$\mathcal{P}_{1D}(k) = \frac{2k}{\pi} \int_0^\infty \xi(r) \cos kr \, dr, \quad \xi(r) = \int_0^\infty \mathcal{P}_{3D}(k) \frac{\sin kr}{kr} \frac{dk}{k}, \quad (3.2)$$

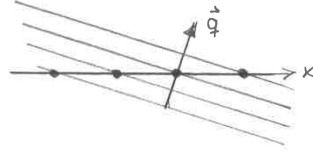
有

$$\mathcal{P}_{1D}(k) = \frac{k}{\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{q^2} \mathcal{P}_{3D}(q) \int_0^\infty dr \frac{2 \cos kr \sin qr}{r} = k \int_k^\infty \frac{dq}{q^2} \mathcal{P}_{3D}(q), \quad (3.3)$$

因为（练习）

$$\int_0^\infty dr \frac{2 \cos kr \sin qr}{r} = \pi \Theta(q - k), \quad (3.4)$$

其中 $\Theta(q - k)$ 是阶跃函数， $q > k$ 时为 1， $q < k$ 时为 0。三维中波长较短、满足 $q > k$ 的模，会对一维中在 k 处观测到的功率产生贡献，因为当 $\mathbf{q}$ 不平行于直线时，三维平面波与直线相交所得到的波长更长。



用 $P_{1D}(k) = (\pi/k) \mathcal{P}_{1D}(k)$ 和 $P_{3D}(k) = (2\pi^2/k^3) \mathcal{P}_{3D}(k)$ 表示，则有

$$P_{1D}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_k^\infty \frac{dq}{q} q^2 P_{3D}(q). \quad (3.5)$$

这意味着，若 P_{3D} 的谱指数 $n \geq -2$ ($\mathcal{P}_{3D}(q) \propto q$ 或更陡)，给定尺度 k 处的 $P_{1D}(k)$ 将主要由小得多尺度（较高 k ）的三维结构贡献，而真正的较大尺度三维结构在一维巡天中无法看出。

由式 (3.5) 可见，

$$\frac{dP_{1D}(k)}{dk} = -\frac{1}{2\pi} k P_{3D}(k), \quad (3.6)$$

因此 $P_{1D}(k)$ 必然单调递减。所以始终有 $n_{1D} < 0$ ，即使 $n_{3D} > 0$ 也是如此。

例。 换一种可能更容易推广到其他情形的方法，重新推导式 (3.5)。从 d 维积分出发：

$$P_{1D}(k) = \int_{-\infty}^\infty dr e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \xi(r), \quad \xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} P_{3D}(q), \quad (3.7)$$

于是

$$P_{1D}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} P_{3D}(q), \quad (3.8)$$

其中矢量 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{k}$ 沿这一维直线方向，可以将其取为 x 轴。因此，指数中有 $(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r} = (q_x - k)r$ ，而对 r 的积分给出

$$\frac{1}{2\pi} \int dr e^{i(q_x - k)r} = \delta_D^1(k - q_x), \quad (3.9)$$

强制要求 $q_x = k$ 。现在写成 $\mathbf{q} = (k, \mathbf{h})$ ，其中 $\mathbf{h}$ 是二维矢量。于是

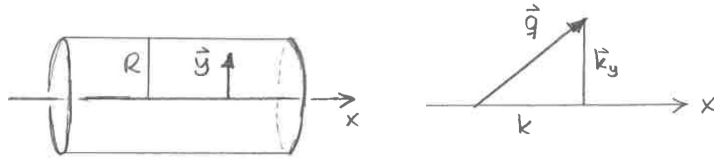
$$P_{1D}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2h P_{3D}(q) = \frac{1}{2\pi} \int h dh P_{3D}(q). \quad (3.10)$$

由于 $q^2 = k^2 + h^2$ ，有 $h dh = q dq$ 且 $q \geq k$ ，便得到式 (3.5)。

对于离散天体（“星系”），必须允许截线具有有限厚度；若将星系视为点，无限细的直线将一个星系也截不到。因此，考虑半径为 R 的细圆柱。²⁰一维密度场 $\delta(x, R)$ 与三维密度场 $\delta(x, \mathbf{y})$ 的关系为

$$\delta(x, R) = \int d^2y \delta(x, \mathbf{y}) W(y), \quad (3.11)$$

其中 $W(y)$ 是二维顶帽窗函数；这里将直线取为 x 轴，并令 $\mathbf{y} = (y, z)$ 。



于是

$$\begin{aligned} \xi(r) &= \langle \delta(x, R) \delta(x+r, R) \rangle = \int d^2y d^2y' \langle \delta(x, \mathbf{y}) \delta(x+r, \mathbf{y}') \rangle W(y) W(y') \\ &= \sum_{\mathbf{k} \mathbf{k}'} \int d^2y d^2y' W(y) W(y') \langle \delta_{\mathbf{k}}^* \delta_{\mathbf{k}'} \rangle e^{-ik_x x} e^{ik'_x (x+r)} e^{-i\mathbf{k}_y \cdot \mathbf{y}} e^{i\mathbf{k}'_y \cdot \mathbf{y}'} \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{ik_x r} P_{3D}(k) \int d^2y W(y) e^{-i\mathbf{k}_y \cdot \mathbf{y}} \int d^2y' W(y') e^{i\mathbf{k}_y \cdot \mathbf{y}'} \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{ik_x r} P_{3D}(k) |W(k_y)|^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

现在将求和换成积分，得到

$$\xi(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x r} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k_y P_{3D}(k) |W(k_y)|^2. \quad (3.13)$$

由此可将 $P_{1D}(k)$ 作为 $\xi(r)$ 的傅里叶变换读出：

$$P_{1D}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k_y P_{3D}(q) |W(k_y)|^2, \quad (3.14)$$

其中 $\mathbf{q} = (k, \mathbf{k}_y)$ 。与式 (3.10) 比较，可见 $P_{3D}(q)$ 被替换成了 $P_{3D}(q) |W(k_y)|^2$ ，其中 $k_y^2 = q^2 - k^2$ 。因此结果为

$$P_{1D}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_k^{\infty} \frac{dq}{q} q^2 P_{3D}(q) \left[W(\sqrt{q^2 - k^2}) \right]^2. \quad (3.15)$$

代入二维顶帽窗函数的傅里叶变换，并用 $\mathcal{P}_{3D}$ 而非 P_{3D} 表示，有

$$P_{1D}(k) = \pi \int_k^{\infty} \frac{dq}{q^2} \mathcal{P}_{3D}(q) \frac{2J_1^2(\sqrt{q^2 - k^2} R)}{(q^2 - k^2) R^2}. \quad (3.16)$$

贝塞尔函数 $J_1(x)$ 很像 $\sin x$ ，只是多了 $x^{-1/2}$ 的衰减。 x 很小时， $J_1(x) \approx x/2$ ；它在 $x \approx 2$ 处达到最大值，此时 $J_1(x) \approx 0.2$ ，在 $x \approx 3.8$ 处再次为零，此后以衰减的振幅继续振荡。因此，窗函数最初近似为常数，式 (3.16) 中乘在 $\mathcal{P}_{3D}(q)$ 上的因子约为 $1/2$ ，在 $q^2 - k^2 > (2/R)^2$ 之后迅速下降。

²⁰对于实际观测，细圆锥会是更合适的几何形状，但它会破坏沿直线方向的均匀性；这样就无法像目前从式 (3.12) 第二行到第三行那样消去 x ，问题会变得复杂。

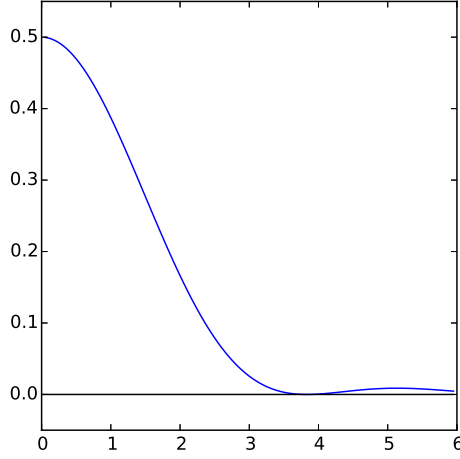


图 11: $2J_1^2(x)/x^2$ 。

例。 Peacock (文献 [1], 第 518 页) 提到 Broadhurst 等人 [16] 长达 $2000 h^{-1}\text{Mpc}$ 的铅笔束巡天 (pencil-beam survey)。它发现了波长为 $128 h^{-1}\text{Mpc}$ 的周期性结构, 即一维功率谱在 $k = 2\pi/128 h^{-1}\text{Mpc} = 0.05 h\text{Mpc}^{-1}$ 处有很强的峰, 因而引起了广泛关注 [17]。这似乎与大尺度结构的标准图景矛盾, 因为按照这一图景, 在这些尺度上 $\sigma^2(R)$ 和 $\mathcal{P}_{3D}(k)$ 应远小于 1。然而, 根据以上讨论, 如此大尺度上出现较大的一维功率并不意外。标准图景认为, 在较小尺度上 $\gamma = 1.8$, 所以 $n = -1.2$ 且 $\mathcal{P}_{3D} \propto k^\gamma$, 在 $k = 0.1 h\text{Mpc}^{-1}$ 附近达到 1, 见图 3。铅笔束的代表性横向半径为 $R = 3 h^{-1}\text{Mpc}$ 。因此, 在所有大于这一尺度的尺度上, 观测到的一维功率都主要由该尺度的三维结构贡献。用在 $q^2 - k^2 = 4/R^2$ 、即 $q = \sqrt{k^2 + 4/R^2}$ 处截断的阶跃函数近似窗函数, 式 (3.16) 变为

$$\begin{aligned} P_{1D}(k) &\approx \frac{\pi}{2} \int_k^{\sqrt{k^2 + 4/R^2}} \frac{dq}{q^2} \left[\frac{q}{0.1 h\text{Mpc}^{-1}} \right]^{1.8} \\ &= [(k^2 + 4/R^2)^{0.4} - k^{0.8}] 124 h^{-1}\text{Mpc}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中最后一步的 k 和 $1/R$ 均以 $h\text{Mpc}^{-1}$ 为单位。方括号内的表达式在大尺度 $k \ll 2/R = 0.7 h\text{Mpc}^{-1}$ 上近似为常数, 在 $k = 0$ 时为 0.72, 在 $k = 0.05 h\text{Mpc}^{-1}$ 时为 0.63; 当 $k \rightarrow 2/R$ 及进一步增大时, 该表达式变小。在 $k = 2\pi/128 h^{-1}\text{Mpc} = 0.05 h\text{Mpc}^{-1}$ 处, 得到 $\mathcal{P}_{1D}(k) = (k/\pi)P_{1D}(k) \approx (0.05/\pi) \times 0.63 \times 124 \approx 1.3$ 。

3.2 切片

留作练习。

练习。 考虑三维密度场的一个二维切片。证明

$$\mathcal{P}_{2D}(k) = k^2 \int_k^\infty \frac{dk'}{\sqrt{(k')^2 - k^2}} \frac{1}{(k')^2} \mathcal{P}_{3D}(k'). \quad (3.18)$$

练习。 改为考虑厚度为 $2R$ 的切片, 即在垂直方向上具有一维顶帽窗函数 $W_T(z; R)$ 。证明

$$\mathcal{P}_{2D}(k) = k^2 \int_k^\infty \frac{dk'}{(k')^2 \sqrt{(k')^2 - k^2}} \mathcal{P}_{3D}(k') \left[W \left(\sqrt{(k')^2 - k^2} \right) \right]^2. \quad (3.19)$$

当 $\mathcal{P}_{3D}(k') \propto (k')^2$ 或更陡, 即 $n \geq -1$ 时, 式 (3.18) 在高 k' 处发散。在式 (3.19) 中, 切片的有限厚度截去了最小尺度的贡献, 因此当 $n \geq -1$ 时, 大尺度二维功率主要由尺度 R 附近的结构贡献。

4 小角度下的角相关函数

假设一个星系巡天没有距离或红移信息。此时，对于每个星系，我们只知道指向它的方向，用单位矢量 $\hat{\mathbf{r}}$ 表示。将角相关函数 $w(\vartheta)$ 定义为：相对于随机分布，在距一个给定星系角间隔为 ϑ 的位置找到另一个星系的超额概率。与式 (2.10) 类似，有

$$\langle n(\hat{\mathbf{r}}_1)n(\hat{\mathbf{r}}_2) \rangle d\Omega_1 d\Omega_2 \equiv \langle n \rangle^2 [1 + w(\vartheta)] d\Omega_1 d\Omega_2, \quad (4.1)$$

其中 $n(\hat{\mathbf{r}})$ 是天空中沿 $\hat{\mathbf{r}}$ 方向每单位立体角 $d\Omega$ 的星系数密度， ϑ 是方向 $\hat{\mathbf{r}}_1$ 与 $\hat{\mathbf{r}}_2$ 之间的夹角。

4.1 与三维相关函数的关系

这与星系的三维分布有何关系？这里关键的一点是，星系巡天看不到给定方向上的所有星系。星系越远，其绝对光度就必须越大，才能被观测到。巡天的选择函数 $S(r)$ 描述了这一点：它给出距离为 r 的星系被该巡天观测到的概率。

由于体积元为 $dV = r^2 dr d\Omega$ ， $n(\hat{\mathbf{r}})$ 与三维星系数密度的关系为

$$n(\hat{\mathbf{r}}) = \int_0^\infty \rho(\mathbf{r}) S(r) r^2 dr, \quad (4.2)$$

以及

$$\langle n \rangle = \langle \rho \rangle \int_0^\infty S(r) r^2 dr \equiv \langle \rho \rangle V_S, \quad (4.3)$$

其中

$$V_S \equiv \int_0^\infty S(r) r^2 dr \quad (4.4)$$

是每单位立体角的选择函数体积。²¹因此，对于覆盖立体角 Ω 的巡天，观测到的星系数的期望值为

$$\langle N \rangle = \langle n \rangle \Omega = \langle \rho \rangle V_S \Omega. \quad (4.5)$$

对于密度扰动， $\delta n(\hat{\mathbf{r}}) \equiv (n(\hat{\mathbf{r}}) - \langle n \rangle) / \langle n \rangle$ 与三维的 $\delta(\mathbf{r}) \equiv (\rho(\mathbf{r}) - \langle \rho \rangle) / \langle \rho \rangle$ 之间的关系为

$$\frac{\delta n}{\langle n \rangle} = \frac{1}{V_S} \int_0^\infty \delta(\mathbf{r}) S(r) r^2 dr. \quad (4.6)$$

于是

$$\begin{aligned} \langle n(\hat{\mathbf{r}}_1)n(\hat{\mathbf{r}}_2) \rangle d\Omega_1 d\Omega_2 &= \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \langle \rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2) \rangle S(r_1)S(r_2) r_1^2 r_2^2 d\Omega_1 d\Omega_2 \\ &= \langle \rho \rangle^2 \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 [1 + \xi(r_{12})] S(r_1)S(r_2) r_1^2 r_2^2 d\Omega_1 d\Omega_2 \\ &= \langle \rho \rangle^2 \int_0^\infty dr_1 S(r_1) r_1^2 d\Omega_1 \int_0^\infty dr_2 S(r_2) r_2^2 d\Omega_2 \\ &\quad + \langle \rho \rangle^2 \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \xi(r_{12}) S(r_1)S(r_2) r_1^2 r_2^2 d\Omega_1 d\Omega_2 \\ &\equiv \langle n \rangle^2 d\Omega_1 d\Omega_2 + \langle n \rangle^2 w(\vartheta) d\Omega_1 d\Omega_2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

因此得到角相关函数与三维相关函数的关系：

$$w(\vartheta) = \frac{\langle \rho \rangle^2}{\langle n \rangle^2} \int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \xi(r_{12}) S(r_1)S(r_2) r_1^2 r_2^2, \quad (4.8)$$

其中

$$r_{12} = \sqrt{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \vartheta}. \quad (4.9)$$

²¹这里的 V_S 是我自己的定义；MBW [2] 始终把积分写出来，没有为它命名。 $S(r)$ 也有不同的归一化方式，例如 Peacock [1] 将其归一化为 $V_S = 1$ 。

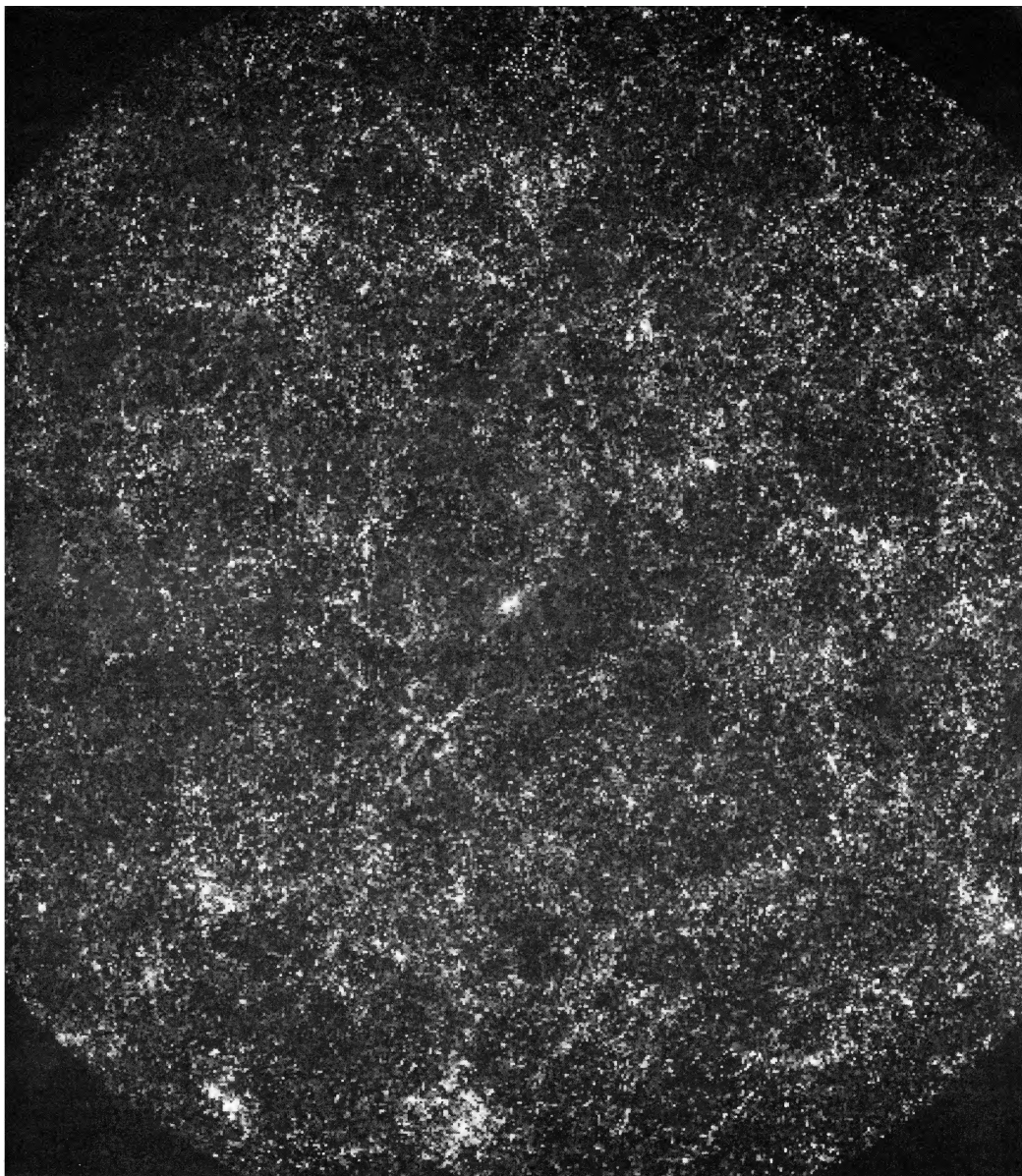


图 12: Shane–Wirtanen 北银半球星系分布图 [21, 22]。天空被划分为 $10' \times 10'$ (角分) 的元胞, 每个元胞按照其中的星系数以灰度着色, 白色表示至少有 8 个星系。星系计数来自极限星等约为 $m_* = 19$ 的 Lick 巡天 [21]。该巡天始于 1950 年, 完成于 1967 年, 包含约一百万个星系, 是当时最大的星系巡天, 也是宇宙大尺度结构研究的一次重要进展。它覆盖北银半球和约一半的南银半球。巡天使用 Lick 天文台的 0.5m 折射望远镜, 即透镜望远镜, 拍摄的 $6^\circ \times 6^\circ$ 照相底片; 该天文台位于旧金山湾区的一座山顶。图中央靠近北银极处是后发座星系团。本图为文献 [23] 的图 3。

4.1.1 选择函数

为简单起见，现在忽略所有宇宙学效应，例如光度距离与共动距离的区别，以及星系和星系成团随时间的演化，并假设巡天是星等限巡天，即在巡天区域内观测到所有视星等小于 m_* 的星系，其中 m_* 是极限星等。绝对星等 M 和视星等 m 定义为对数尺度：

$$m \equiv -2.5 \lg \frac{l}{l_0}, \quad M \equiv -2.5 \lg \frac{L}{L_0}, \quad (4.10)$$

其中 l 是视光度，即流量密度、单位面积接收到的功率； L 是绝对光度，即辐射功率； l_0 、 L_0 是参考光度，其选取使距离为 10 pc 的天体满足 $m = M$ 。实际上，电磁波谱的不同波段具有不同的星等标度和参考光度。热星等标度对应整个波谱，其 $L_0 = 3.0 \times 10^{28} \text{ W}$ 。因此 L 与 M 的关系为

$$L = L_0 \times 10^{-0.4M}. \quad (4.11)$$

星系的星等 m 、 M 与距离 r ²² 满足

$$m - M = -5 + 5 \lg r(\text{pc}) \quad \Rightarrow \quad r = 10^{(m-M)/5} \times 10 \text{ pc}. \quad (4.12)$$

因此，星系能够被观测到的条件是

$$M < m_* + 5 - 5 \lg r(\text{pc}). \quad (4.13)$$

练习。 求热星等标度下 l_0 的数值，以 W/m^2 为单位。

例如，如果所有星系都具有 $M = -20$ ，那么距离小于 $d_* = 10^{(m_*/5)+4} \times 10 \text{ pc} = 10^{m_*/5} \times 0.1 \text{ Mpc}$ 的星系都能被观测到，更远处则一个也观测不到；仙女座星系具有 $M = -20.3$ [24]，因此这一取值对旋涡星系是典型的。此时选择函数是阶跃函数：

$$S(r) = \Theta(d_* - r) = \Theta(1 - r/d_*), \quad (4.14)$$

其中 d_* 是巡天深度。 $m_* = 20$ 时得到 $d_* = 1 \text{ Gpc}$ ，在这一距离上宇宙学效应已开始变得显著。该选择函数的体积为 $V_S = d_*^3/3$ 。对于全天巡天， $\Omega = 4\pi$ ，因此 $V_S \Omega$ 就是熟悉的 $4\pi d_*^3/3$ 。

实际上，不同星系具有不同的 M ，选择函数与星系光度函数 $\phi(L)$ ，即星系光度 L 的概率分布，满足

$$S(r) = \int_{L_*(r)}^{\infty} \phi(L) dL \Big/ \int_0^{\infty} \phi(L) dL, \quad (4.15)$$

其中

$$L_*(r) = L_0 \times 10^{-0.4m_* - 2 + 2 \lg r(\text{pc})} \quad (4.16)$$

是在距离 r 处能够观测到的最小光度。如果将 $\phi(L)$ 归一化，使分母的积分等于 1，则可以省去分母，但显然并不一定采用这种归一化。我们仍可将巡天深度 $d_* \propto 10^{m_*/5}$ 定义为某一参考星等 M 能够被观测到的最远距离。在忽略宇宙学效应的近似下，光度函数不随时间演化，选择函数的形状也与 m_* 无关，只是沿距离方向按 d_* 成比例伸缩，因此可写为

$$S(r) \equiv f(r/d_*), \quad (4.17)$$

其中 f 由 $\phi(L)$ 决定，与巡天无关。一般而言， $V_S \propto d_*^3$ 。

以上忽略了不同宇宙学距离概念之间的区别。式 (4.12) 中的距离实际上是光度距离 d^L ，在平直宇宙学中，它与共动距离 d^C 的关系为 $d^L = (1+z)d^C$ 。以 $M = -22$ 为参考星等，多数星系比

²²实际上是光度距离。

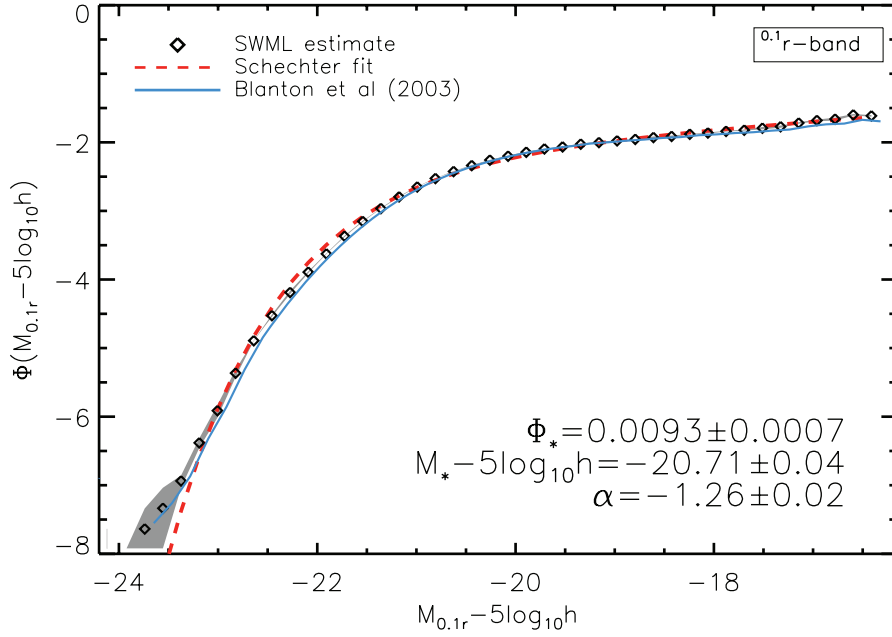


图 13: SDSS 巡天中红移 $z = 0.02\text{--}0.22$ 的星系在 r 波段 (“红”光, 约 550–680 nm) 的光度函数 ϕ 。不同波段的 SDSS 光度函数有显著差异: 通常星系在较长波长的 i (“近红外”) 和 z (“红外”) 波段具有较暗的星等, 即更大的 M 值; 在较短波长的 g (“绿”) 和 u (“紫外”) 波段具有较亮的星等, 即更负的 M 值。 $h = 0.7$ 时, $-5 \lg h = 0.775$ 。本图为文献 [25] 的图 7。

巡天	m_*	d_*^L	z_*	d_*^C
Lick	19	1.58 Gpc	0.30	1.2 Gpc
Euclid	24.5	19.95 Gpc	2.45	5.8 Gpc

表 3: 取参考星等 $M = -22$, 并假设 $\Omega_m = 0.3$ 、 $h = 0.7$ 的平直宇宙学时, Lick 和 Euclid 巡天的深度。作为比较, 在这一宇宙学中, 产生宇宙微波背景的最后散射面的共动距离为 13.6 Gpc。

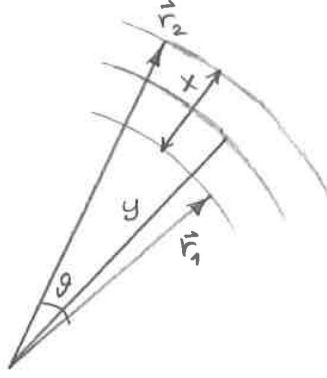
它暗, 但这一星等的星系仍足够多, 可用于统计; 于是对于极限星等 $m_* = 19$ 的 Lick 巡天, 得到深度 $d_*^L = 1.58 \text{ Gpc}$, 对于极限星等 $m_* = 24.5$ 的 Euclid 巡天, 得到深度 $d_*^L = 19.95 \text{ Gpc}$ 。转换为共动距离需要知道相应红移, 而红移取决于所假设的宇宙学, 计算稍显复杂。假设平直宇宙学, 取 $\Omega_m = 0.3$ 、 $h = 0.7$, 并从 “宇宙学 II” 第 3 节末尾的表 2 插值得到红移, 即得到表 3。

4.1.2 小角度极限

现在假设, 与存在显著相关 $\xi(r_{12})$ 的间隔 r_{12} 相比, 巡天深度 d_* 很大, 因此在二重积分 (4.8) 中, 只有当 $r_{12} \ll d_*$ 时才有显著贡献。这意味着, 除小角度 $\vartheta \ll 1$ 外, $w(\vartheta)$ 都可忽略。显然, 这里的 “显著” “可忽略” 和 “小” 都是相对的说法; 巡天规模越大、质量越好, 我们能够追求的精度就越高。现在可以计算积分 (4.8)。注意, 它是对两个距离 r_1 、 r_2 的二维积分。被积函数中的 $\xi(r_{12})$ 还通过式 (4.9) 依赖于夹角 ϑ , 但我们在固定 ϑ 的条件下积分。定义

$$y \equiv \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \quad x \equiv r_2 - r_1, \quad (4.18)$$

即一对位置矢量 $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$ 的平均距离与距离差, 并作从 (r_1, r_2) 到 (x, y) 的坐标变换。这一变换的雅可比行列式为 -1 (练习), 故 $dr_1 dr_2 = dx dy$ 。



由于 $x \leq r_{12}$ ，前面的假设意味着，仅当 x 很小时，式 (4.8) 才有显著贡献，否则 $\xi \sim 0$ 。因此， x 的积分限并不重要，可以将

$$\int_0^\infty dr_1 \int_0^\infty dr_2 \text{ 替换为 } \int_0^\infty dy \int_{-\infty}^\infty dx. \quad (4.19)$$

选择函数在远小于 d_* 的距离范围内变化缓慢，因此可以近似为

$$S(r_1)S(r_2) = S(y + \frac{1}{2}x)S(y - \frac{1}{2}x) \approx S(y)^2. \quad (4.20)$$

进一步在出现 $\cos \vartheta$ 的地方作适当的小角度近似，得到（练习）

$$w(\vartheta) \approx \frac{1}{V_S^2} \int_0^\infty dy y^4 S^2(y) \int_{-\infty}^\infty dx \xi \left(\sqrt{x^2 + y^2 \vartheta^2} \right). \quad (4.21)$$

这称为 Limber 方程；它是文献 [1] 中的式 (16.100) 和文献 [2] 中的式 (6.166)。注意，这里使用的记号是两者的折中。

巡天深度会如何影响 $w(\vartheta)$ ？定义缩放后的距离 $s \equiv y/d_*$ ，即 $y = d_* s$ 。式 (4.21) 变为

$$w(\vartheta) \approx \frac{d_*^5}{V_S^2} \int_0^\infty ds s^4 f^2(s) \int_{-\infty}^\infty dx \xi \left(\sqrt{x^2 + d_*^2 s^2 \vartheta^2} \right) = \frac{1}{d_*} \times F(d_* \vartheta), \quad (4.22)$$

其中函数 F 与 d_* 无关。因此，增大巡天深度会使相关移向更小的角度，并降低其振幅。第一个效应是因为距离越远，相同的物理尺度，即存在相关的尺度，对应的视角越小。第二个效应则是因为，我们看到的叠加在一起、处于不同距离的结构彼此不相关，因而倾向于在 $w(\vartheta)$ 中相互抵消。

Peacock（文献 [1]，第 521 页）评论说，观测到这种随巡天深度增大而产生的效应，对于证明没有距离信息的巡天中所见结构是真实的十分重要，例如图 12 中的 Lick 巡天。这类巡天会受到一些效应的影响，例如前景消光导致的选择函数各向异性；如果不加以校正，它们就会表现为虚假的结构，而有时可能无法校正。

4.1.3 幂律

现在假设三维相关函数具有幂律形式：

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\gamma}. \quad (4.23)$$

我们预期 $w(\vartheta)$ 的斜率较缓，因为尺度越小，叠加在一起的结构层数就越多，抵消效应也应越强。

Limber 方程 (4.21) 变为 (练习)

$$\begin{aligned}
w(\vartheta) &\approx \frac{r_0^\gamma}{V_S^2} \int_0^\infty dy y^4 S^2(y) \int_{-\infty}^\infty dx (x^2 + y^2 \vartheta^2)^{-\gamma/2} \\
&= \frac{2r_0^\gamma \vartheta^{1-\gamma}}{V_S^2} \int_0^\infty dx (1+x^2)^{-\gamma/2} \int_0^\infty dy y^{5-\gamma} S^2(y) \\
&= r_0^\gamma \vartheta^{1-\gamma} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2}(\gamma-1))}{\Gamma(\frac{1}{2}\gamma)} \frac{1}{V_S^2} \int_0^\infty dy y^{5-\gamma} S^2(y).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

因此, 角相关函数也具有幂律形式, 但斜率更缓, 为 $\gamma-1$:

$$w(\vartheta) = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right)^{1-\gamma}. \tag{4.25}$$

当 $\gamma = 1.8$ 时, $w(\vartheta)$ 的斜率因而为 0.8。满足 $w(\vartheta) = 1$ 的角度 ϑ_0 通过选择函数 $S(y)$ 依赖于巡天深度。

练习。 求 ϑ_0 如何随巡天深度 d_* 改变, 即若 d_* 增大为原来的 D 倍, ϑ_0 将变为原来的多少倍。

练习。 对于阶跃选择函数, 以及 $\gamma = 9/5$ 的幂律相关函数, 用 r_0 和 d_* 表示 ϑ_0 。当 $r_0 = 5 h^{-1} \text{Mpc}$ 、 $d_* = 1000 h^{-1} \text{Mpc}$ 时, 给出以角分为单位的数值。

4.2 平坦天空的功率谱

如果巡天区域足够小, 即区域内最大的 ϑ 远小于 1,²³ 就可以将这一区域的天空视为平坦的二维欧几里得空间。此时可用二维矢量 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y)$ 代替三维单位矢量 $\hat{\mathbf{r}}$ 来指定坐标。因此, 在巡天中心或任意选定的原点处, $\boldsymbol{\theta} = 0$; 选取两个正交方向, 例如西和北, 或东和南, 来确定分量 θ_x 、 θ_y 。它们以度或弧度为单位, 或者更适合以角分或毫弧度为单位。于是可以定义二维相关函数 $w(\boldsymbol{\theta})$; 它与先前定义的 $w(\vartheta)$ 是同一个量, 其中 $\vartheta = |\boldsymbol{\theta}| \ll 1$ 。

若这一平坦天空上的巡天区域是正方形, 就可以沿用第 1.6 节关于二维相关函数和功率谱的结果, 即式 (1.83) 与 (1.84) 的二维情形, 仅稍改记号:

$$\begin{aligned}
P_\vartheta(K) &= \int_0^\infty w(\vartheta) J_0(K\vartheta) 2\pi\vartheta d\vartheta, & \mathcal{P}_\vartheta(K) &= K^2 \int_0^\infty w(\vartheta) J_0(K\vartheta) \vartheta d\vartheta, \\
w(\vartheta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty P_\vartheta(K) J_0(K\vartheta) K dK, & &= \int_0^\infty \mathcal{P}_\vartheta(K) J_0(K\vartheta) \frac{dK}{K}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

对于幂律相关函数

$$w(\vartheta) = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right)^{-\varepsilon}, \tag{4.27}$$

利用式 (1.114), 得到幂律形式的功率谱:

$$\begin{aligned}
P_\vartheta(K) &= \frac{2\pi}{K^2} 2^{1-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\Gamma(\frac{1}{2}\varepsilon)} (K\vartheta_0)^\varepsilon = \frac{2\pi}{K^2} 2^{2-\gamma} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\gamma)}{\Gamma(\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2})} (K\vartheta_0)^{\gamma-1} \quad (\frac{1}{2} < \varepsilon < 2), \\
\mathcal{P}_\vartheta(K) &= 2^{1-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\Gamma(\frac{1}{2}\varepsilon)} (K\vartheta_0)^\varepsilon = 2^{2-\gamma} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\gamma)}{\Gamma(\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2})} (K\vartheta_0)^{\gamma-1},
\end{aligned} \tag{4.28}$$

其中第二种形式假设 $\varepsilon = \gamma - 1$ 。当 $\varepsilon = 0.8$ 时,

$$\mathcal{P}_\vartheta(K) = 0.7712 (K\vartheta_0)^{0.8}. \tag{4.29}$$

²³ 只要我们仅关注小尺度的相关函数和高 K 处的功率谱, 这一方法也可用于较大的巡天区域。例如, 可以把较大的巡天区域划分为若干小正方形, 将本节的方法分别应用于每个正方形, 最后对不同正方形得到的全部 $P_\vartheta(K)$ 取平均。

4.2.1 与三维功率谱的关系

用三维功率谱表示 Limber 方程 (4.21) 中的 $\xi(\sqrt{x^2 + y^2\vartheta^2})$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \xi(\sqrt{x^2 + y^2\vartheta^2}) = \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} \mathcal{P}(k) \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin(k\sqrt{x^2 + y^2\vartheta^2})}{k\sqrt{x^2 + y^2\vartheta^2}}. \quad (4.30)$$

对 x 的积分可写为

$$\frac{2}{k} \int_0^{\infty} dx \frac{\sin \sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad (4.31)$$

其中 $a = ky\vartheta$ 。Wolfram Alpha 无法完成这一积分。Gradshteyn 和 Ryzhik [9] 的式 3.876.1 给出

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(p\sqrt{x^2 + a^2}) \cos bx}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \frac{\pi}{2} J_0(a\sqrt{p^2 - b^2}) \quad (0 < b < p), \quad (4.32)$$

但这里 $b = 0$, 所以 $\cos bx = 1$ 。没有理由认为该结果不适用于 $b = 0$, 因为在 $b \rightarrow 0$ 时, 被积函数和结果的行为都没有问题。因此, 取 x 积分的结果为 $(\pi/k)J_0(ky\vartheta)$, Limber 方程便成为

$$w(\vartheta) \approx \frac{1}{V_S^2} \int_0^{\infty} dy y^4 S^2(y) \int_0^{\infty} \frac{dk}{k^2} \pi \mathcal{P}(k) J_0(ky\vartheta). \quad (4.33)$$

令 $k = K/y$, 则变为

$$w(\vartheta) \approx \frac{1}{V_S^2} \int_0^{\infty} dy y^5 S^2(y) \int_0^{\infty} \frac{dK}{K^2} \pi \mathcal{P}(K/y) J_0(K\vartheta). \quad (4.34)$$

将式 (4.33) 与式 (4.26) 比较, 可以读出

$$\mathcal{P}_{\vartheta}(K) = \frac{1}{V_S^2} \frac{\pi}{K} \int_0^{\infty} dy y^5 S^2(y) \mathcal{P}(K/y), \quad (4.35)$$

这就是 Limber 方程的功率谱形式。

Peacock [1] 在第 520 页评论说: “这只是对数空间中的卷积, 比 w - ξ 形式, 即式 (4.21), 更容易计算和解释。” 也就是说, 将 S 和 $\mathcal{P}$ 看作 $\ln y$ 和 $\ln k$ 的函数。数学上, 这些是不同的函数 $S \circ \exp$ 和 $\mathcal{P} \circ \exp$; 但按照物理学中的惯例, 即使把同一个物理量看作不同变量的函数, 仍使用相同的符号。于是

$$\mathcal{P}_{\vartheta}(\ln K) = \frac{1}{V_S^2} \frac{\pi}{K} \int_{-\infty}^{\infty} e^{6 \ln y} S^2(\ln y) \mathcal{P}(\ln K - \ln y) d \ln y. \quad (4.36)$$

练习。 证明: 若将巡天深度增大为原来的 D 倍, 则较深巡天的角功率谱 $\tilde{\mathcal{P}}_{\vartheta}(K)$ 与较浅巡天的 $\mathcal{P}_{\vartheta}(K)$ 满足

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\vartheta}(K) = \frac{1}{D} \mathcal{P}_{\vartheta}(K/D). \quad (4.37)$$

当把式 (4.35) 应用于宇宙学理论给出的功率谱 $\mathcal{P}(k)$ 时, 它可能随时间演化, 即 $\mathcal{P}(k, t)$; 此时对于每个 y , 只需使用 $\mathcal{P}(K/y, t(y))$, 其中 $t(y)$ 是距离 y 处的当地时间。

5 球面天空

对于天空中较大角度上的相关, 必须考虑天空具有球面几何这一事实。因此, 现在的二维空间不是欧几里得空间, 而是球面。这使数学处理更困难, 但也有一个好处: 考虑全天时, 无需担心边界条件或边缘效应。实际中这一好处并不存在, 因为没有真正的全天星系巡天; 至少银道面区域会受到银河系的遮蔽。不过, 我们仍从全天情形开始。

要指定球面上的一个点，可以使用单位矢量

$$\hat{\mathbf{r}} = (x, y, z) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (5.1)$$

或球坐标 θ, ϕ 。球坐标系在 $\theta = 0$ (“北极”) 和 $\theta = \pi$ (“南极”) 处是奇异的，因而这些位置的 ϕ 不确定。注意，传统天文坐标系，即地平、赤道、黄道和银道坐标系的“纬度”——地平高度 a 、赤纬 δ 、黄纬 β 、银纬 b ——等于 $\pi/2 - \theta$ ，所以在赤道、黄道等处为零； θ 有时称为“余纬”。在这些坐标系中， ϕ 分别称为方位角 A 、²⁴赤经 α 、黄经 λ 和银经 l 。

5.1 角相关函数与角功率谱

现在不再按平面波作傅里叶展开，而将天空中的密度扰动按球谐函数展开：

$$\delta(\hat{\mathbf{r}}) = \delta(\theta, \phi) = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (5.2)$$

其中求和遍历 $\ell = 0, 1, 2, \dots, \infty$ 和 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$ ， $Y_{\ell m}$ 是球谐函数，在球面上构成一组完备的标准正交函数。球谐系数

$$a_{\ell m} = \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) \delta(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.3)$$

现在承担了欧几里得空间中傅里叶系数 $\delta_{\mathbf{k}}$ 的角色。它们是复数，但由 δ 的实性可得

$$a_{\ell, -m} = (-1)^m a_{\ell m}^*, \quad (5.4)$$

所以对每个 ℓ ，有 $2\ell + 1$ 个实自由度。

统计均匀性和各向同性²⁵意味着，“理论”相关函数，即系综平均相关函数，

$$w(\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2) \equiv \langle \delta(\hat{\mathbf{r}}_1) \delta(\hat{\mathbf{r}}_2) \rangle = w(\vartheta) \quad (5.5)$$

只能依赖于方向 $\hat{\mathbf{r}}_1$ 与 $\hat{\mathbf{r}}_2$ 之间的夹角 ϑ 。

与式 (1.74) 的证明类似，可以证明，统计均匀性和各向同性意味着

$$\langle a_{\ell m}^* a_{\ell' m'} \rangle = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} 2\pi \int_{-1}^1 d \cos \vartheta L_{\ell}(\cos \vartheta) w(\vartheta) \equiv \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} C_{\ell}, \quad (5.6)$$

证明见第 5.5 节末尾。其中

$$C_{\ell} = \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle = 2\pi \int_{-1}^1 d \cos \vartheta L_{\ell}(\cos \vartheta) w(\vartheta) \quad (5.7)$$

是角功率谱， L_{ℓ} 是勒让德多项式。²⁶注意，期望值 $\langle |a_{\ell m}|^2 \rangle$ 与 m 无关。指标 ℓ 称为多极数，对应角尺度；指标 m 则对应同一角尺度上的不同取向和图样。也就是说，在傅里叶展开中， ℓ 对应于 k ，而 m 对应于方向 $\hat{\mathbf{k}}$ 。

因此，利用式 (5.6) 和 (5.28)，得到

$$\begin{aligned} w(\vartheta) &\equiv \langle \delta(\hat{\mathbf{r}}_1) \delta(\hat{\mathbf{r}}_2) \rangle = \sum_{\ell m} \sum_{\ell' m'} \langle a_{\ell m}^* a_{\ell' m'} \rangle Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}_1) Y_{\ell' m'}(\hat{\mathbf{r}}_2) \\ &= \sum_{\ell} C_{\ell} \sum_m Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}_1) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}_2) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} (2\ell + 1) C_{\ell} L_{\ell}(\cos \vartheta). \end{aligned} \quad (5.8)$$

²⁴方位角通常定义为 $A = -\phi$ 。

²⁵在这一语境中，人们通常只谈“各向同性”，因为位置 $\mathbf{r}$ 的角色现在由方向 $\hat{\mathbf{r}}$ 承担；但这里仍有两个不同的方面：一是从我们指向天空的所有方向 $\hat{\mathbf{r}}$ 等价，二是“沿着”天空的所有方向等价，即 $\hat{\mathbf{r}}_1$ 与 $\hat{\mathbf{r}}_2$ 之间夹角的不同取向等价。

²⁶勒让德多项式通常记为 P_{ℓ} ，但后面需要用这一记号表示功率谱的多极矩。

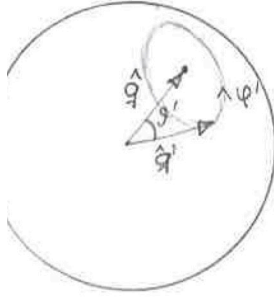
也可以利用式 (5.7) 和勒让德多项式的完备性证明这一点，留作练习。

对于单个实现，可以将“观测相关函数” $\hat{w}(\vartheta)$ 定义为天空平均：²⁷

$$\hat{w}(\vartheta) \equiv \langle \delta(\hat{\mathbf{r}})\delta(\hat{\mathbf{r}}') \rangle_{\text{sky}}, \quad (5.9)$$

其中 $\langle \cdot \rangle_{\text{sky}}$ 表示对所有角间隔为 ϑ 的方向对 $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}'$ 取平均。先选定参考方向 $\hat{\mathbf{r}}$ ，对与它相距 ϑ 的方向 $\hat{\mathbf{r}}'$ 所构成的圆作积分：

$$\hat{w}(\hat{\mathbf{r}}, \vartheta) \equiv \frac{1}{2\pi} \int d\phi' \delta(\hat{\mathbf{r}})\delta(\hat{\mathbf{r}}'). \quad (5.10)$$



再对全天积分，其中 $d\Omega$ 是对 $\hat{\mathbf{r}}$ 的积分：

$$\hat{w}(\vartheta) \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \hat{w}(\hat{\mathbf{r}}, \vartheta) = \frac{1}{8\pi^2} \int d\Omega \int d\phi' \delta(\hat{\mathbf{r}})\delta(\hat{\mathbf{r}}'). \quad (5.11)$$

尽管 $|a_{\ell m}|^2$ 的期望值对所有 m 都相同，实际实现中的数值却不同。将它们的平均值定义为“观测”角功率谱 $\hat{C}_\ell$ ：

$$\hat{C}_\ell \equiv \frac{1}{2\ell+1} \sum_m |a_{\ell m}|^2. \quad (5.12)$$

我们希望像式 (5.7) 和 (5.8) 对理论量 w, C_ℓ 所做的那样，建立 $\hat{w}$ 与 $\hat{C}_\ell$ 的联系。从式 (5.12) 出发，

$$\begin{aligned} \hat{C}_\ell &\equiv \frac{1}{2\ell+1} \sum_m |a_{\ell m}|^2 = \int d\Omega d\Omega' \delta(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}') \frac{1}{2\ell+1} \sum_m Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}') \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \int d\Omega' \delta(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}') L_\ell(\cos \vartheta') \\ &= \int d\cos \vartheta' L_\ell(\cos \vartheta') \frac{1}{4\pi} \int d\Omega d\phi' \delta(\hat{\mathbf{r}})\delta(\hat{\mathbf{r}}') \\ &= 2\pi \int \hat{w}(\vartheta) L_\ell(\cos \vartheta) d\cos \vartheta, \end{aligned} \quad (5.13)$$

因而也有

$$\hat{w}(\vartheta) = \frac{1}{4\pi} \sum_\ell (2\ell+1) \hat{C}_\ell L_\ell(\cos \vartheta). \quad (5.14)$$

当 $\vartheta = 0$ 时，得到

$$w(0) \equiv \langle \delta^2 \rangle = \sum_\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} C_\ell, \quad \hat{w}(0) \equiv \langle \delta^2 \rangle_{\text{sky}} = \sum_\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} \hat{C}_\ell. \quad (5.15)$$

5.2 勒让德多项式

勒让德多项式 $L_\ell(x)$ (文献 [8], 第 12 章) 在区间 $[-1, 1]$ 上构成一组完备的正交函数。 $L_\ell(x)$ 是 ℓ 次多项式。其正交关系为

$$\int_{-1}^1 L_\ell(x) L_{\ell'}(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}, \quad (5.16)$$

²⁷原则上，这里应该用 $\hat{\delta}$ 代替 δ ，即使用相对于天空平均密度、而非期望值的扰动，但这样写看起来过于繁琐。

勒让德多项式

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

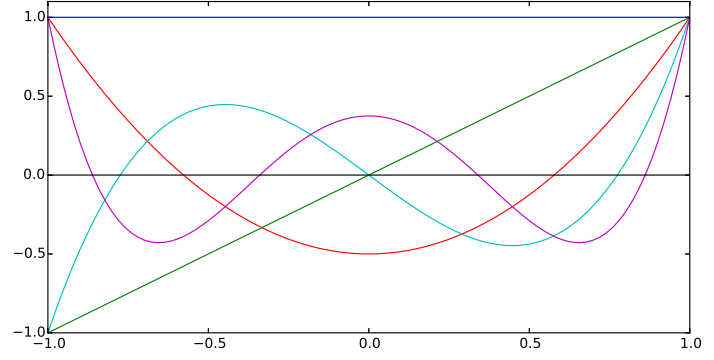


表 4: 勒让德多项式: L_0 (蓝色)、 L_1 (绿色)、 L_2 (红色)、 L_3 (青色)、 L_4 (品红色)。

完备性关系²⁸为

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} L_{\ell}(x) L_{\ell}(y) = \delta_D(x-y). \quad (5.17)$$

因此, 标准正交函数组为

$$\left\{ \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}} L_{\ell}(x) \right\}. \quad (5.18)$$

勒让德多项式通常以 $L_{\ell}(\cos \vartheta)$ 的形式出现, 区间 $[-1, 1]$ 对应于 ϑ 的区间 $[0, \pi]$ 。在两个端点处,

$$L_{\ell}(-1) = (-1)^{\ell}, \quad L_{\ell}(1) = 1. \quad (5.19)$$

其宇称由 ℓ 决定:

$$L_{\ell}(-x) = (-1)^{\ell} L_{\ell}(x). \quad (5.20)$$

5.3 球谐函数

球谐函数 (文献 [8], 第 12 章) 在球面上构成一组完备的标准正交函数。标准正交关系为

$$\int d\Omega Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\ell' m'}(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (5.21)$$

完备性关系为

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) Y_{\ell m}(\theta', \phi') = \delta_D(\phi - \phi') \delta_D(\cos \theta - \cos \theta'). \quad (5.22)$$

它们是初等函数, 具有显式表达式²⁹

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (5.23)$$

其中

$$\begin{aligned} P_{\ell}^m(z) &= (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} L_{\ell}(z) \quad (m \geq 0), \\ P_{\ell}^{-m}(z) &= (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell}^m(z) \end{aligned} \quad (5.24)$$

²⁸同样, 这在文献中也很难找到。维基百科中有这一关系。

²⁹ $Y_{\ell m}$ 有不同的相位约定。这里采用文献 [8] 的 Condon-Shortley 相位约定。文献 [26] 对 $Y_{\ell m}$ 使用相同的相位约定, 但已将 $(-1)^m$ 包含在 P_{ℓ}^m 的定义中, 因此其对应于式 (5.23) 的表达式中没有这一因子。

缔合勒让德函数 $P_\ell^m(z) = P_\ell^m(\cos \theta)$
$P_1^1(z) = \sqrt{1-z^2} = \sin \theta$
$P_2^1(z) = 3z\sqrt{1-z^2} = 3 \cos \theta \sin \theta$
$P_2^2(z) = 3(1-z^2) = 3 \sin^2 \theta$
球谐函数
$Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
$Y_1^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy)$
$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot z$
$Y_2^2(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \sin^2 \theta e^{i2\phi} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot (x + iy)^2$
$Y_2^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \sin \theta \cos \theta e^{i\phi} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot z(x + iy)$
$Y_2^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot (3z^2 - 1)$

表 5: 球谐函数。

是缔合勒让德函数，因此

$$P_\ell^0(z) = L_\ell(z). \quad (5.25)$$

注意，当 $z = \cos \theta$ 时， $(1-z^2)^{1/2} = \sin \theta$ 。因此，对 θ 的依赖包含在 $P_\ell^m(\cos \theta)$ 中，对 ϕ 的依赖包含在 $e^{im\phi}$ 中。 P_ℓ^m 为实函数，并且

$$Y_{\ell, -m} = (-1)^m Y_{\ell m}^*, \quad (5.26)$$

所以

$$Y_{\ell 0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} L_\ell(\cos \theta) \quad \text{为实函数。} \quad (5.27)$$

对同一多极数 ℓ 所对应的 m 求和，得到加法定理：

$$\sum_m Y_{\ell m}^*(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \frac{2\ell+1}{4\pi} L_\ell(\cos \vartheta), \quad (5.28)$$

其中 ϑ 是 $\hat{\mathbf{n}} = (\theta, \phi)$ 与 $\hat{\mathbf{n}}' = (\theta', \phi')$ 之间的夹角，即 $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}' = \cos \vartheta$ 。当 $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}'$ 时，它变为

$$\sum_m |Y_{\ell m}(\theta, \phi)|^2 = \frac{2\ell+1}{4\pi}, \quad (5.29)$$

因为始终有 $L_\ell(1) = 1$ 。

我们还需要平面波的球谐展开：

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = 4\pi \sum_{\ell m} i^\ell j_\ell(kx) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}). \quad (5.30)$$

这里 $\hat{\mathbf{x}}$ 和 $\hat{\mathbf{k}}$ 是沿 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{k}$ 方向的单位矢量， j_ℓ 是球贝塞尔函数。

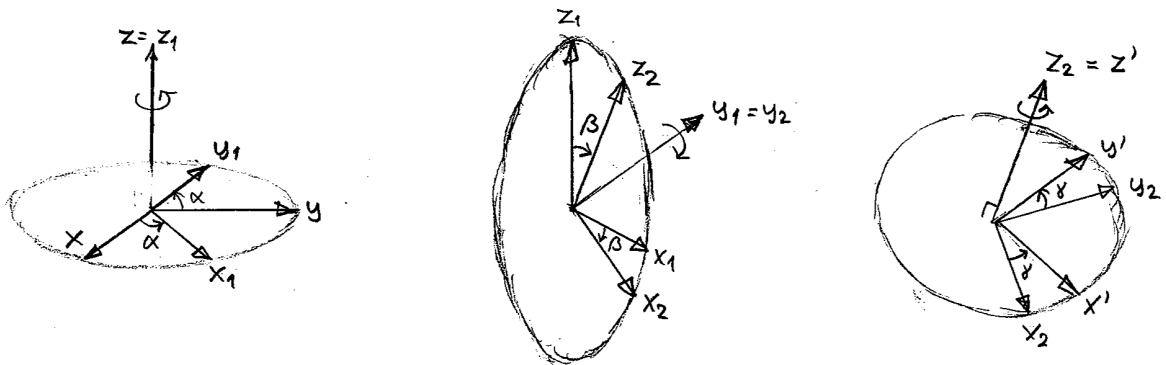
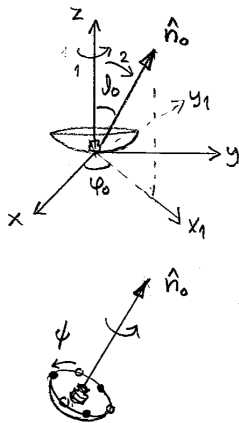


图 14: 用欧拉角构造坐标系旋转: 1) 绕原来的 z 轴旋转角度 α ($0 \leq \alpha < \pi$), 将新坐标记为 x_1, y_1, z_1 。2) 绕新的 y_1 轴旋转角度 β ($0 \leq \beta \leq \pi$), 将新坐标记为 x_2, y_2, z_2 。3) 绕 z_2 轴旋转角度 γ ($0 \leq \gamma < \pi$), 将新坐标记为 x', y', z' 。

5.4 欧拉角

[注意: 这里仅在证明式 (5.6) 时需要欧拉角和 Wigner 函数。读者可以直接跳到第 5.6 节。我还不知道本课程后面是否会用到它们。在球面几何下处理弱引力透镜时会出现 Wigner 函数, 但我们可能不会深入到那一步。] 要指定三维空间中坐标系的取向, 或更一般地说, 刚体的取向, 需要三个角: 其中两个指定 z 轴指向, 第三个固定 x, y 轴绕 z 轴旋转的自由度。它们称为欧拉角, 通常记作 α, β, γ ; 根据应用, 也可记作 $\phi, \theta, \psi/\chi$ 。指定这些角有两种方式, 即有两种用它们构造从原坐标系到新坐标系的旋转的方法 (文献 [26], 第 1.4 节); 两种方式得到相同的最终取向。这里只介绍第一种, 见图 14。旁边的示意图对应我最初需要欧拉角的场景, 即 Planck 卫星波束的取向。可以设想旋转一架最初指向上方的射电望远镜: 角度 (β, α) 是单位矢量 $\hat{z}'$, 即最终指向 $\hat{n}_0$, 在原坐标系中的球坐标 (θ, ϕ) , 而 γ (ψ) 描述绕这一方向的旋转。



5.5 Wigner D 函数

Wigner 函数 (文献 [26], 第 4 章) 与球坐标的旋转有关。对于给定的天空, 即一个实现, 其球谐系数 $a_{\ell m}$ 依赖于所选择的球坐标系, 例如赤道、黄道或银道坐标系。写成

$$\delta(\hat{r}) = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sum_{\ell m} \tilde{a}_{\ell m} Y_{\ell m}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}), \quad (5.31)$$

其中 (θ, ϕ) 是 $\hat{r}$ 在第一个坐标系中的坐标, $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ 是在第二个坐标系中的坐标。不同坐标系的 $a_{\ell m}$ 之间满足

$$a_{\ell m} = \sum_{m'} D_{mm'}^{\ell}(\alpha, \beta, \gamma) \tilde{a}_{\ell m'}, \quad (5.32)$$

其中 $D_{mm'}^{\ell}$ 是 Wigner 函数, α, β, γ 是从第一个坐标系旋转到第二个坐标系的欧拉角。这意味着球谐函数满足

$$Y_{\ell m'}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) = \sum_m Y_{\ell m}(\theta, \phi) D_{mm'}^{\ell}(\alpha, \beta, \gamma). \quad (5.33)$$

欧拉角的取值范围为³⁰

$$0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq \gamma < 2\pi. \quad (5.34)$$

计算中也可能需要使用这些范围以外的角度。任意 α 或 γ 都等价于其模 2π 的值; Wigner 函数对它们具有周期性, 就像 $\sin$ 和 $\cos$ 一样。负的 β 再次覆盖同一组旋转, 因为旋转 $(\alpha + \pi, \beta, \gamma - \pi)$ 与 $(\alpha, -\beta, \gamma)$ 相同。

可以把固定 ℓ 下的一组 $a_{\ell m}$ 看成具有 $2\ell+1$ 个分量的矢量, 把 $(2\ell+1) \times (2\ell+1)$ 矩阵 $D^{\ell}(\alpha, \beta, \gamma)$ 看成将这些分量旋转到新基底的矩阵。对欧拉角的所有取值, 这些矩阵构成旋转群 $SO(3)$ 的一个表示。它们是么正矩阵:

$$D^{\ell}(\alpha, \beta, \gamma)^{\dagger} = D^{\ell}(\alpha, \beta, \gamma)^{-1}, \quad (5.35)$$

因此, 式 (5.32) 和 (5.33) 的逆关系为

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{\ell m} &= \sum_{m'} a_{\ell m'} D_{m'm}^{\ell}(\alpha, \beta, \gamma)^*, \\ Y_{\ell m}(\theta, \phi) &= \sum_{m'} D_{mm'}^{\ell}(\alpha, \beta, \gamma)^* Y_{\ell m'}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Wigner 函数在这一三维旋转空间中正交且完备 [27]:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} d\cos\beta \int_0^{2\pi} d\gamma D_{mn}^{\ell}(\alpha, \beta, \gamma)^* D_{m'n'}^{\ell}(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{8\pi^2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{m'=-\ell}^{\ell} \frac{2\ell+1}{8\pi^2} D_{mm'}^{\ell}(\alpha, \beta, \gamma)^* D_{mm'}^{\ell}(\alpha', \beta', \gamma') &= \delta_D(\alpha - \alpha') \delta_D(\cos\beta - \cos\beta') \delta_D(\gamma - \gamma'). \end{aligned} \quad (5.37)$$

因此, 标准正交函数组为

$$\left\{ \sqrt{\frac{2\ell+1}{8\pi^2}} D_{mm'}^{\ell}(\alpha, \beta, \gamma) \right\}. \quad (5.38)$$

Wigner 函数是初等函数, 可以用实函数 $d_{mn}^{\ell}(\beta)$ 表示为

$$D_{mn}^{\ell}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-im\alpha} d_{mn}^{\ell}(\beta) e^{-in\gamma}, \quad (5.39)$$

其中 [27]

$$\begin{aligned} d_{mn}^{\ell}(\beta) &= \sum_{t=\max(0, m-n)}^{\min(\ell+m, \ell-n)} \frac{(-1)^{\ell} \sqrt{(\ell+m)! (\ell-m)! (\ell+n)! (\ell-n)!}}{(\ell+m-t)! (\ell-n-t)! t! (t+n-m)!} \\ &\quad \times \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2\ell+m-n-2t} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{2t+n-m}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

³⁰这里只考虑 ℓ, m, m' 为整数的 Wigner 函数。量子力学中还引入 ℓ 为半整数的 Wigner 函数, 它们的周期是 4π 而不是 2π 。这里给出的部分公式不能直接用于这些函数。

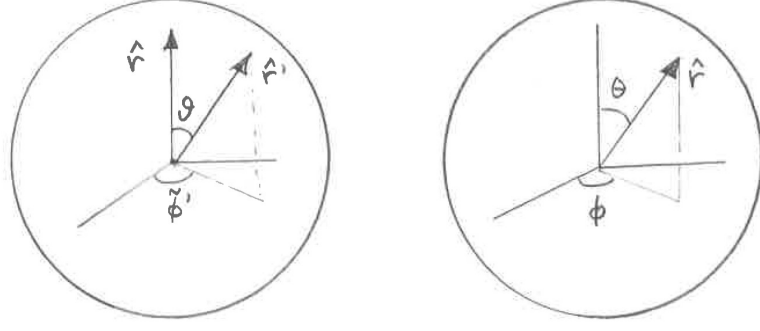


图 15: 左图: 新坐标系中的 $\hat{r}$ 和 $\hat{r}'$ 。右图: 原坐标系中的 $\hat{r}$ 。

求和上下限等价于要求不出现负数的阶乘。

这些 d 矩阵具有若干联系不同分量的对称性:

$$\begin{aligned} d_{mm'}^\ell(\beta) &= (-1)^{m-m'} d_{-m, -m'}^\ell(\beta) = (-1)^{m-m'} d_{m'm}^\ell(\beta) = d_{-m', -m}^\ell(\beta), \\ d_{mm'}^\ell(-\beta) &= d_{m'm}^\ell(\beta). \end{aligned} \quad (5.41)$$

球谐函数可以用 Wigner 函数表示, 是它们的特例:

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} D_{-m, 0}^\ell(\phi, \theta, \chi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} D_{m, 0}^\ell(\phi, \theta, \chi)^*, \quad (5.42)$$

由于 $m' = 0$, 这一表达式与第三个角 χ 无关。

式 (5.6) 的证明。 证明与式 (1.74) 类似, 这里重写一遍:

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\mathbf{k}}^* \delta_{\mathbf{k}'} \rangle &= \frac{1}{V^2} \int d^d x e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int d^d x' e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'} \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}') \rangle \\ &= \frac{1}{V^2} \int d^d x e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int d^d r e^{-i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{r})} \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \\ &= \frac{1}{V^2} \int d^d r e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \xi(\mathbf{r}) \int d^d x e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{V} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \int d^d r e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \xi(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{V} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} P(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (5.43)$$

不过, 现在的证明更复杂: 此前只需简单平移坐标系 $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, 把平面波 $e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'}$ 换成 $e^{-i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{r})}$; 现在则必须引入角度为 ϑ 的坐标系旋转。

沿着同样的思路, 从

$$\langle a_{\ell m}^* a_{\ell' m'} \rangle \equiv \int d\Omega Y_{\ell m}(\theta, \phi) \int d\Omega' Y_{\ell' m'}^*(\theta', \phi') \langle \delta(\hat{\mathbf{r}}) \delta(\hat{\mathbf{r}}') \rangle \quad (5.44)$$

出发。现在 $\langle \delta(\hat{\mathbf{r}}) \delta(\hat{\mathbf{r}}') \rangle = w(\vartheta)$, 但要继续推导, 需要用 θ, ϕ, ϑ 改写 $Y_{\ell' m'}^*(\theta', \phi')$ 。以上 (θ, ϕ) 和 (θ', ϕ') 是同一坐标系中两个不同点的坐标。现在引入另一个坐标系 $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$, 它是以第一个点 $\hat{\mathbf{r}}$ 为参照的球坐标系, 即 $\hat{\mathbf{r}}$ 是该坐标系的“北极”, 满足 $\tilde{\theta} = 0$, 因而现在 $\tilde{\theta}' = \vartheta$ 。旋转到新坐标系的欧拉角为 $\alpha = \phi$ 、 $\beta = \theta$, 而 γ 可以任意选取。 $\hat{\mathbf{r}}'$ 的新坐标为 $(\vartheta, \tilde{\phi}')$, 并且

$$Y_{\ell' m'}^*(\theta', \phi') = \sum_{m''} D_{m' m''}^{\ell'}(\phi, \theta, \gamma) Y_{\ell' m''}^*(\vartheta, \tilde{\phi}'). \quad (5.45)$$

现在可以继续：

$$\begin{aligned}
\langle a_{\ell m}^* a_{\ell' m'} \rangle &= \int d\Omega Y_{\ell m}(\theta, \phi) \int d\tilde{\Omega}' \sum_{m''} D_{m' m''}^{\ell'}(\phi, \theta, \gamma) Y_{\ell' m''}^*(\vartheta, \tilde{\phi}') w(\vartheta) \\
&= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sum_{m''} \int d\tilde{\Omega}' Y_{\ell' m''}^*(\vartheta, \tilde{\phi}') w(\vartheta) \\
&\quad \times \int d\Omega D_{m 0}^{\ell}(\phi, \theta, \chi)^* D_{m' m''}^{\ell'}(\phi, \theta, \gamma).
\end{aligned} \tag{5.46}$$

利用 $D_{m 0}^{\ell}(\phi, \theta, \chi)$ 与 χ 无关这一事实，令 $\chi = \gamma$ ；又因为 γ 可以任意选取，对它积分，得到

$$\begin{aligned}
\langle a_{\ell m}^* a_{\ell' m'} \rangle &= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sum_{m''} \int d\tilde{\Omega}' Y_{\ell' m''}^*(\vartheta, \tilde{\phi}') w(\vartheta) \\
&\quad \times \frac{1}{2\pi} \int d\gamma \int d\Omega D_{m 0}^{\ell}(\phi, \theta, \gamma)^* D_{m' m''}^{\ell'}(\phi, \theta, \gamma) \\
&= \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sum_{m''} \int d\tilde{\Omega}' Y_{\ell' m''}^*(\vartheta, \tilde{\phi}') w(\vartheta) \times \frac{4\pi}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \delta_{0m''} \\
&= \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \int d\tilde{\Omega}' Y_{\ell' 0}^*(\vartheta, \tilde{\phi}') w(\vartheta) \\
&= \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \int d\tilde{\Omega}' L_{\ell}(\cos \vartheta) w(\vartheta) \\
&= \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} 2\pi \int d\cos \vartheta L_{\ell}(\cos \vartheta) w(\vartheta) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_{\ell}.
\end{aligned} \tag{5.47}$$

5.6 与三维功率谱的关系

现在建立角功率谱 C_{ℓ} 与三维功率谱 $\mathcal{P}(k)$ 的联系。由式 (4.2)，有

$$\delta(\hat{\mathbf{r}}) \equiv \frac{n(\hat{\mathbf{r}}) - \langle n \rangle}{\langle n \rangle} = \frac{1}{V_S} \int_0^{\infty} \delta(\mathbf{r}) S(r) r^2 dr. \tag{5.48}$$

作展开

$$\delta(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 4\pi \sum_{\ell m} \delta_{\mathbf{k}} i^{\ell} j_{\ell}(kr) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}), \tag{5.49}$$

并将它们代入

$$a_{\ell m} = \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}) \delta(\hat{\mathbf{r}}), \tag{5.50}$$

得到（练习）

$$\begin{aligned}
a_{\ell m} &= \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} \frac{4\pi i^{\ell}}{V_S} \int_0^{\infty} dr S(r) r^2 j_{\ell}(kr) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}), \\
\langle |a_{\ell m}|^2 \rangle &= \frac{16\pi^2}{V} \sum_{\mathbf{k}} P(k) |Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}})|^2 \left[\frac{1}{V_S} \int_0^{\infty} dr S(r) r^2 j_{\ell}(kr) \right]^2, \\
C_{\ell} &= \frac{1}{2\ell+1} \sum_m \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle = \frac{4\pi}{V} \sum_{\mathbf{k}} P(k) \left[\frac{1}{V_S} \int_0^{\infty} dr S(r) r^2 j_{\ell}(kr) \right]^2.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

将求和 $(1/V) \sum_{\mathbf{k}}$ 换成积分 $(2\pi)^{-3} \int d^3 k$ ，并将 $k^2 P(k)/(2\pi^2)$ 换成 $\mathcal{P}(k)/k$ ，得到最终的精确结果：

³¹

$$\begin{aligned}
C_{\ell} &= \frac{2}{\pi} \int dk k^2 P(k) \left[\frac{1}{V_S} \int_0^{\infty} dr S(r) r^2 j_{\ell}(kr) \right]^2 \\
&= 4\pi \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}(k) \left[\frac{1}{V_S} \int_0^{\infty} dr S(r) r^2 j_{\ell}(kr) \right]^2.
\end{aligned} \tag{5.52}$$

³¹MBW [2] 的式 (6.177) 此处多了因子 $1/(2\ell+1)$ ，但这似乎是错误。Peacock [1] 的式 (16.98) 与式 (5.52) 一致。

6 动力学

6.1 线性微扰论

在“宇宙学 II”中，我们推导了平直宇宙中视界内标量扰动的线性扰动方程。对于无压物质，在傅里叶空间中，它们为

$$\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \frac{ikv_{\mathbf{k}}}{a} = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{d}{dt}(av_{\mathbf{k}}) + ik\Phi_{\mathbf{k}} = 0, \quad (6.2)$$

$$-k^2\Phi_{\mathbf{k}} = 4\pi Ga^2\bar{\rho}_m\delta_{\mathbf{k}}, \quad (6.3)$$

在坐标空间中则为

$$\dot{\delta} + \frac{1}{a}\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(a\mathbf{v}) = -\nabla\Phi, \quad (6.5)$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi Ga^2\bar{\rho}_m\delta. \quad (6.6)$$

这里将尺度因子归一化为 $a_0 = 1$ 。 $\delta = \delta_m$ 是物质密度扰动， $\mathbf{v}$ 是物质流速，相对于均匀膨胀的背景宇宙而言，而 Φ 是扰动产生的引力势。注意，由于假设了标量扰动，

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \parallel \mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{v}_{\mathbf{k}} = v_{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{k}} = kv_{\mathbf{k}} \Rightarrow (\nabla \cdot \mathbf{v})_{\mathbf{k}} = ikv_{\mathbf{k}}. \quad (6.7)$$

如“宇宙学 II”所讨论，矢量扰动会衰减，因此可以忽略。

除了物质主导的平直宇宙，即 Einstein–de Sitter 宇宙，以及包含物质和宇宙学常数的平直宇宙，即 Λ CDM，这些方程也可用于封闭或开放的物质主导宇宙中远小于曲率半径的尺度；对于宇宙学常数（真空能）以外的暗能量模型，在忽略暗能量扰动影响的近似下也可使用。

将式 (6.1) 和 (6.3) 代入式 (6.2)，得到无压 Jeans 方程：

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} - 4\pi G\bar{\rho}_m\delta_{\mathbf{k}} &= 0, \\ \ddot{\delta}(\mathbf{x}) + 2H\dot{\delta}(\mathbf{x}) - 4\pi G\bar{\rho}_m\delta(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

由于傅里叶空间中的方程不含 k 依赖，它也在坐标空间成立。这些微分方程的系数只依赖于时间，即只依赖于背景解。不同位置的扰动 $\delta(\mathbf{x})$ 独立演化，其差别仅由不同的初始条件 δ 和 $\dot{\delta}$ 引起。

方程有两个独立解：增长模 δ_+ 和衰减模 δ_- 。它们通过哈勃参数 $H(t)$ 依赖于宇宙学。对于平直的物质主导宇宙，

$$\delta_+ \propto a, \quad \delta_- \propto a^{-3/2} \quad (\Omega_m = \Omega = 1). \quad (6.9)$$

在“宇宙学 II”第 9.3.6 节中，我们也推导了 Λ CDM 的解：

$$\begin{aligned} \delta_+ &\propto H \int^a \frac{da}{H^3 a^3} \propto \sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda} \int^a \frac{a^{3/2} da}{[1 + (\Omega_\Lambda/\Omega_m)a^3]^{3/2}}, \\ \delta_- &\propto H \propto \sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda} \quad (\Omega_m + \Omega_\Lambda = \Omega = 1). \end{aligned} \quad (6.10)$$

δ_+ 积分下限的自由度，即积分常数，对应于衰减模。

一段时间后，衰减模消失，初始条件的两个自由度便减少为一个。此后可以忽略衰减模，只保留增长模。所有位置及所有傅里叶分量的时间演化都相同， $\delta(a) \propto D(a)$ ，其中 $D(a)$ 为增长函数，这里暂不指定其归一化。³²即

$$\delta(\mathbf{x}, a) = D(a)\delta(\mathbf{x}, a_{\text{ref}}), \quad \delta_{\mathbf{k}}(a) = D(a)\delta_{\mathbf{k}}(a_{\text{ref}}), \quad (6.11)$$

³²MBW [2] 将它任意初始时刻 t_i 归一化为 1，因此增长模满足 $\delta(\mathbf{x}, a) = D(a)\delta_i(\mathbf{x})$ 。在物质主导的 Friedmann 模型中，此时 $D(a) = a/a_i$ 。

其中 a_{ref} 是所选参考时刻的尺度因子；选定这一时刻，就固定了 D 的归一化，使 $D(a_{\text{ref}}) = 1$ 。增长函数 D 是式 (6.8) 的增长模解。衰减模消失后，密度扰动场除整体乘上这一随时间变化的因子外，不发生其他改变。势 Φ 通过式 (6.3) 与 δ 联系，其中 $a^2 \bar{\rho}_m \propto a^{-1}$ 。因此，势的时间演化为

$$\Phi \propto \frac{D(a)}{a} \Rightarrow \Phi(\mathbf{x}, a) = \frac{D(a)}{a} a_{\text{ref}} \Phi(\mathbf{x}, a_{\text{ref}}), \quad \Phi_{\mathbf{k}}(a) = \frac{D(a)}{a} a_{\text{ref}} \Phi_{\mathbf{k}}(a_{\text{ref}}). \quad (6.12)$$

由于 $a = 1/(1+z)$,

$$\frac{d \ln(1+z)}{dt} = -\frac{d \ln a}{dt} = -H, \quad (6.13)$$

且

$$H^{-1} \frac{\dot{\delta}}{\delta} = H^{-1} \frac{\dot{D}}{D} = H^{-1} \frac{d \ln D}{dt} = -\frac{d \ln D}{d \ln(1+z)} \equiv f, \quad (6.14)$$

这里定义了增长模的增长率：

$$f \equiv -\frac{d \ln D}{d \ln(1+z)} = \frac{d \ln \delta}{d \ln a}. \quad (6.15)$$

在平直的物质主导宇宙中， $D \propto a$ 且 $f = 1$ 。对于相关独立背景宇宙学参数只有 H_0 和 Ω_m 的模型，例如物质主导宇宙或 Λ CDM， $f(z)$ 只依赖于 $\Omega_m(z)$ ，³³所以常记为 $f(\Omega_m)$ 。定义增长指数

$$\gamma \equiv \frac{d \ln f}{d \ln \Omega_m(z)}. \quad (6.16)$$

增长指数在很宽的 a 或 z 范围内几乎保持不变，至少对 Λ CDM 和开放的 Friedmann 模型是如此，因而

$$f(z) \approx \Omega_m(z)^\gamma. \quad (6.17)$$

对于 Λ CDM 模型，由“宇宙学 II”或式 (6.10) 得

$$D(a) = \sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda} \int^a \frac{x^{3/2} dx}{[1 + (\Omega_\Lambda/\Omega_m)x^3]^{3/2}},$$

$$f(a) = \frac{1}{1 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} a^3} \left[\frac{a}{\left(a^{-3} + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}\right)^{1/2} \int_0^a \frac{x^{3/2} dx}{\left(1 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} x^3\right)^{3/2}}} - \frac{3}{2} \right], \quad (6.18)$$

$$\Omega_m(a) = \frac{1}{1 + (\Omega_\Lambda/\Omega_m)a^3} = \frac{(1+z)^3}{(1+z)^3 + \Omega_\Lambda/\Omega_m}.$$

并且 $\gamma \approx 0.55$ ，见图 16，所以³⁴

$$f(z) \approx \Omega_m(z)^{0.55}. \quad (6.19)$$

对于 $(\Omega_m = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7)$ 的 Λ CDM 模型， $f(z=0) \approx 0.52$ ；更高红移时，由于当时 Ω_m 更大， f 也更大。

³³对于开放的 Friedmann 模型，式 (6.22) 表明了这一点。对于 Λ CDM，由于式 (6.10) 第一行中的积分，数学处理更困难，因此我未能将 f 写成这样的形式。我的直觉是， f 应当只依赖于随时间变化的密度参数。影响增长的另一个背景量只有哈勃参数，它与时间尺度有关；但我预期，对 $\ln a$ 求导后，结果应该与它无关。

³⁴在文献中，例如文献 [33]，我曾见过 $\gamma = 6/11$ 的写法，其值约为 0.5455。我不知道这是否意在表示某种精确数值。

例。对于开放的 Friedmann 模型,

$$\Omega_m(a) = \frac{1}{1+x}, \quad \text{其中 } x \equiv \frac{1-\Omega_m}{\Omega_m}a = \frac{1}{\Omega_m(a)} - 1, \quad (6.20)$$

Dodelson [11] 的练习 7.8 给出的增长函数为

$$D(a) = \frac{5\Omega_m}{2(1-\Omega_m)} \left[3 \frac{\sqrt{1+x}}{x^{3/2}} \ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) + 1 + \frac{3}{x} \right]. \quad (6.21)$$

对它求导, 我得到

$$f(a) = -\frac{\frac{9}{2x} \left[\frac{1+(2x/3)}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}} \ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) + 1 \right]}{3 \frac{\sqrt{1+x}}{x^{3/2}} \ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) + 1 + \frac{3}{x}}. \quad (6.22)$$

由此得到 $\gamma \approx 0.59$ 。文献通常给出 0.6, 但在为图 17 分别尝试两者后, 0.59 似乎更接近, 见图 17。式 (6.22) 清楚地表明, f 仅依赖于 $\Omega_m(a)$, 因为 x 可以用 $\Omega_m(a)$ 表示。

在广义相对论中, 无压物质线性扰动的增长率由膨胀率决定。对于宇宙加速膨胀, 除暗能量外, 另一种解释是修改引力理论。这样的修改引力理论应当给出不同的膨胀率与增长率关系。因此, 精确测量膨胀率和增长率, 就能区分这两种解释。

Euclid 任务的目标之一, 是以优于 ± 0.02 的精度测定增长指数 γ , 从而检验引力。

第 7 节将讨论如何由星系分布的红移空间畸变 (RSD) 确定增长率。为此, 需要速度与密度扰动的关系, 下面将讨论这一点。

由式 (6.4) 及增长率 f 的定义 (6.14), 在衰减模消失后, 得到密度扰动与速度散度的关系:

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{-\nabla \cdot \mathbf{v}}{aHf}. \quad (6.23)$$

类似地, 可以得到速度与引力势梯度的关系, 留作练习:

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{4\pi G \bar{\rho}_m a} H f \nabla \Phi = -\frac{1}{4\pi G \bar{\rho}_m a} \frac{\dot{D}}{D} \nabla \Phi. \quad (6.24)$$

因此, 在任意给定时刻, 速度都正比于势梯度。以上两个性质在扰动处于线性阶段, 即 $\delta \ll 1$ 时成立。

上文的 $\delta = \delta_m$ 指包括暗物质在内的物质密度场。通常认为, 在超密区域中星系形成效率更高, 因此与物质密度相比, 星系数密度 ρ_g 的扰动被增强:

$$\delta_g = b\delta_m, \quad \text{其中 } b > 1 \quad (6.25)$$

称为偏置。³⁵我们将它视为常数。这显然是一种近似: 预期它会有一定红移依赖, 而且 δ_g 与 δ_m 之间的关系并非严格线性。不同天体类别的偏置不同: 普通星系接近 1, 较大且年老的星系更高, 星系团则更高。速度由总物质扰动的引力产生, 同样作用于星系。因此

$$\delta_g = b\delta_m = \frac{-b\nabla \cdot \mathbf{v}}{aHf} \equiv \frac{-\nabla \cdot \mathbf{v}}{aH\beta}, \quad \text{其中 } \beta \equiv f/b. \quad (6.27)$$

回到傅里叶空间, 则为

$$-ikv_{\mathbf{k}} = aH\beta\delta_{g\mathbf{k}}. \quad (6.28)$$

³⁵也许某处应该单列一小节讨论偏置。由于我们能直接观测星系分布, 而质量分布较难推断, 因此对星系功率谱和相关函数振幅的了解, 比对质量分布相应量的了解精确得多。假设偏置为常数, 两者通过因子 b^2 联系; 方差同样满足 $\sigma_m^2 = b^{-2}\sigma_g^2$ 。观测上, 对光学探测的星系, 有 $\sigma_{g,T}^2(8 h^{-1} \text{Mpc}) = 1$, 这里采用顶帽窗函数, 平滑尺度为 $8 h^{-1} \text{Mpc}$ 。因此, 质量分布不均匀性振幅的一个常用度量是

$$\sigma_8 \equiv \sigma_{m,T}(8 h^{-1} \text{Mpc}) = 1/b_g. \quad (6.26)$$

由于不知道 b_g 的值, 也就不知道 σ_8 的值。可以尝试从对质量分布有响应的量的宇宙学测量中推断它, 例如弱引力透镜或本动速度; 宇宙学模型在各参数取值固定后, 也会预言它的值。

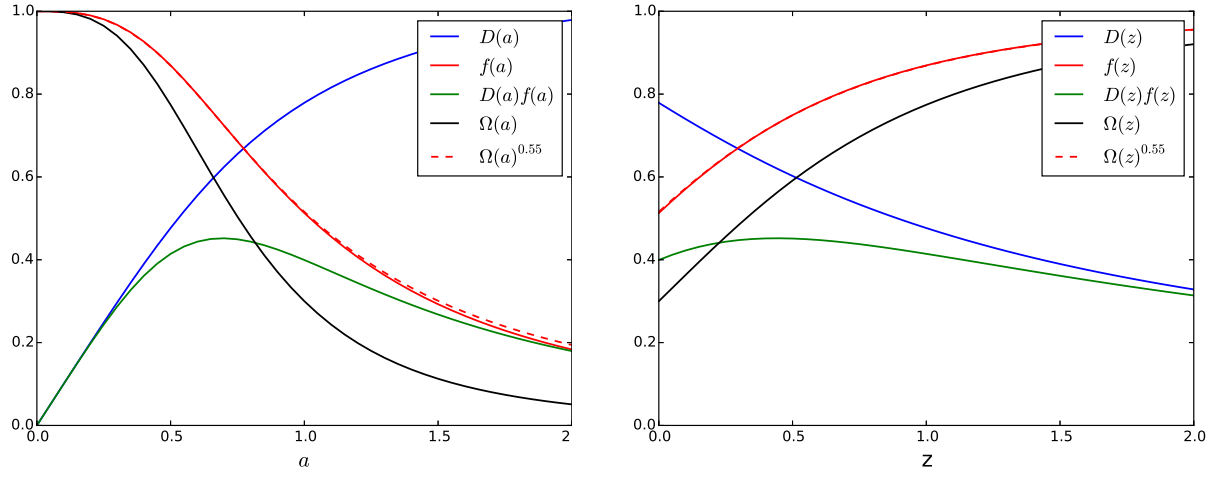


图 16: Λ CDM 模型 ($\Omega_m = 0.3$) 的增长函数 $D(a)$ 和增长率 $f(a)$ 。

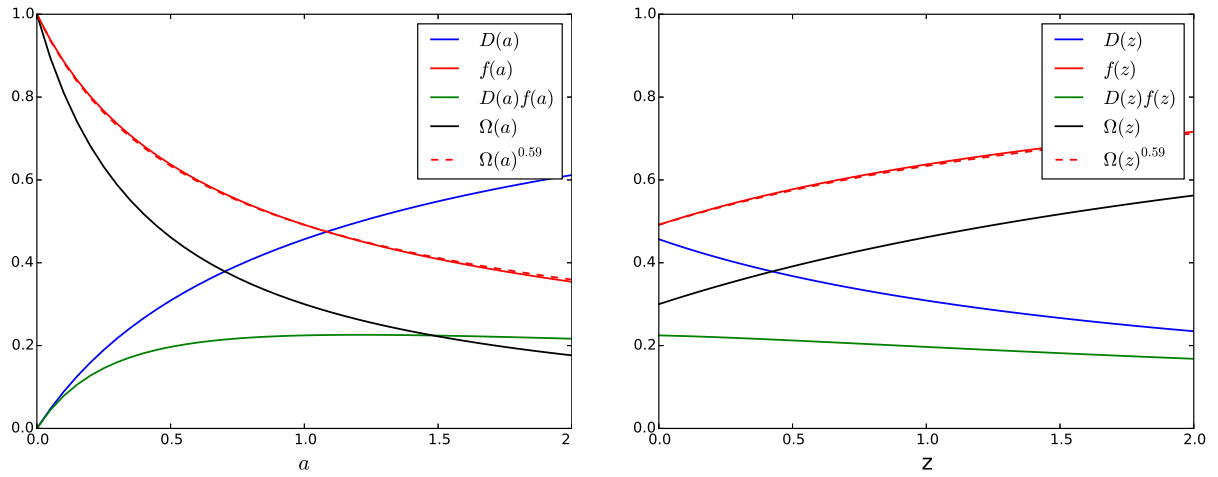


图 17: 开放的 Friedmann 模型 ($\Omega_m = 0.3$) 的增长函数 $D(a)$ 和增长率 $f(a)$ 。

6.2 Zel'dovich 近似

本节将增长函数 D 归一化为：在某个较早的物质主导时刻 $D = 1$ ，此时 $a \ll 1$ ，但已能忽略衰减解。将其称为“初始时刻”，以下标 i 表示。于是

$$\delta(\mathbf{x}, a) = D(a)\delta_i(\mathbf{x}), \quad \Phi(\mathbf{x}, a) = \frac{D(a)}{a}a_i\Phi_i(\mathbf{x}), \quad (6.29)$$

其中用尺度因子 a 代替时间坐标。

现在考虑流体元的位置 $\mathbf{x}$ 随时间的变化。由于 $\mathbf{x}$ 是共动坐标，

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{v}}{a} = -\frac{1}{4\pi G\bar{\rho}_m a^2} \frac{\dot{D}}{D} \nabla\Phi = -\frac{a_i \dot{D}}{4\pi G\bar{\rho}_m a^3} \nabla\Phi_i. \quad (6.30)$$

作近似 $\nabla\Phi_i(\mathbf{x}) \approx \nabla\Phi_i(\mathbf{x}_i)$ ，其中 $\mathbf{x}_i$ 是流体元在初始时刻的位置，再积分，注意 $\bar{\rho}_m a^3$ 为常数：

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_i - \frac{a_i}{4\pi G\bar{\rho}_m a^3} \nabla\Phi_i(\mathbf{x}_i) \int \dot{D} dt, \quad (6.31)$$

在晚期 $D(a) \gg D(a_i)$ 时，可以近似为

$$\int \dot{D} dt = D(a) - D(a_i) \approx D(a). \quad (6.32)$$

于是得到

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_i - \frac{a_i D(a)}{4\pi G\bar{\rho}_m a^3} \nabla\Phi_i(\mathbf{x}_i), \quad (6.33)$$

即 Zel'dovich 近似。

这一结果用一阶微扰论得到，但事实表明，当扰动变大时，追踪流体元运动的方法，在实际中并不像对固定位置的密度扰动积分的通常方法那样迅速失效。在 Zel'dovich 近似中，我们通过追踪相邻流体元彼此靠近或远离的轨迹，得到密度扰动的演化。可以设想初始时的一块立方体流体，观察各顶点如何移动，从而改变立方体的体积与形状。

变换 $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}(t)$ 的雅可比行列式给出流体元共动体积的变化，共动密度则按其倒数改变，由此得到密度场的演化：

$$1 + \delta = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_i} \right|^{-1} = \frac{1}{(1 - D\lambda_1)(1 - D\lambda_2)(1 - D\lambda_3)}, \quad (6.34)$$

其中

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_i} \right| = (1 - D\lambda_1)(1 - D\lambda_2)(1 - D\lambda_3), \quad (6.35)$$

λ_i 是矩阵

$$\frac{a_i}{4\pi G\bar{\rho}_m a^3} \partial_j \partial_k \Phi_i \quad (6.36)$$

的本征值。在 $\lambda_i D \ll 1$ 时，有 $1 + \delta \approx 1 + D(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$ ，即

$$\delta \approx D(a)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3). \quad (6.37)$$

旋转坐标系使式 (6.36) 对角化，可以看到

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{a_i}{4\pi G\bar{\rho}_m a^3} \nabla^2 \Phi_i = \delta_i, \quad (6.38)$$

因此式 (6.37) 与式 (6.29) 一致。

将本征值按 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ 排序。 λ_i 可以为正也可以为负，但对于超密区域 $\lambda_i > 0$ ，其和为正，所以至少有 $\lambda_1 > 0$ 。由式 (6.34) 随 D 增大的变化可见，当 $D \rightarrow 1/\lambda_1$ 时， $\delta \rightarrow \infty$ 。显然，Zel'dovich

近似在此之前就必然失效。但在失效前，可以看出 λ_1 对应于超密区域压缩最快的方向，因此超密区域会趋于展平，形成垂直于该方向的平面状结构；所得的扁平超密结构称为“Zel'dovich 薄饼”。由此可见，不完全呈球形的超密区域，即各本征值 λ_i 不相等的区域，会以偏离各向同性程度不断增大的方式坍塌。

随着数值模拟的规模和质量提高，Zel'dovich 近似一度主要成为教学工具。不过，近年来它又作为分析大尺度结构观测数据的工具重新用于前沿研究，这一应用称为重建。在重建中，沿推断出的运动方向将观测星系向后移动，以得到更接近原初状态的密度分布。这有助于更精确地定位重子声学振荡（BAO）峰，见第 10 节。

6.3 非线性增长

随着 δ 增大，演化进入非线性阶段，需要更复杂的讨论。高阶微扰论或 Zel'dovich 近似可以把分析推进得更远，但最终必须依靠数值模拟。本课程不讨论这些方法。球对称的特殊情形可以解析处理，下面给出一个简单例子。

封闭的 Friedmann 模型。 在“宇宙学 I”中，我们推导了³⁶封闭的 ($\Omega > 1$)、物质主导的 FRW 宇宙的膨胀规律。它不能写成 $a(t)$ 的闭式表达式，但可以用辅助变量——发展角 ψ ——表示为

$$\begin{aligned} a(\psi) &= a_i \frac{\Omega_i}{2(\Omega_i - 1)} (1 - \cos \psi) = a(\psi) \frac{\Omega(\psi)}{2[\Omega(\psi) - 1]} (1 - \cos \psi), \\ t(\psi) &= H_i^{-1} \frac{\Omega_i}{2(\Omega_i - 1)^{3/2}} (\psi - \sin \psi) = H(\psi)^{-1} \frac{\Omega(\psi)}{2[\Omega(\psi) - 1]^{3/2}} (\psi - \sin \psi), \end{aligned} \quad (6.39)$$

其中 a_i, Ω_i, H_i 是某一参考时刻 t_i 的尺度因子、密度参数和哈勃参数。通常将该时刻选为现在 t_0 ，但下文会改为选择某个较早时刻，此时 Ω 仍非常接近 1。第二种表达形式利用了 t_i 可以选为演化过程中任意时刻这一事实，将其换成“当前”时刻。 $a(t)$ 的形状见图 18；这条曲线称为摆线，即车轮轮缘上一点的运动轨迹。由式 (6.39) 解得

$$\Omega(\psi) = \frac{2}{1 + \cos \psi}. \quad (6.40)$$

计算 $da/dt = (da/d\psi)(d\psi/dt)$ ，得到（练习）

$$H(\psi) = 2H_i \frac{(\Omega_i - 1)^{3/2}}{\Omega_i} \frac{\sin \psi}{(1 - \cos \psi)^2}. \quad (6.41)$$

物质密度为

$$\rho(\psi) = \rho_i \left[\frac{a_i}{a(\psi)} \right]^3 = 8\rho_i \frac{(\Omega_i - 1)^3}{\Omega_i^3 (1 - \cos \psi)^3}. \quad (6.42)$$

在 $t_{\max}$ 、即 $\psi = \pi$ 时，尺度因子达到最大值 $a_{\max}$ ，密度达到最小值，因此

$$a_{\max} = a_i \frac{\Omega_i}{\Omega_i - 1}, \quad t_{\max} = \frac{\pi}{2} H_i^{-1} \frac{\Omega_i}{(\Omega_i - 1)^{3/2}}, \quad \rho(t_{\max}) = \rho_i \frac{(\Omega_i - 1)^3}{\Omega_i^3}. \quad (6.43)$$

此时 $H = 0$ ，随后宇宙开始收缩。由于

$$\rho_i = \frac{3\Omega_i H_i^2}{8\pi G}, \quad \text{有} \quad \rho(t_{\max}) = \frac{3\pi}{32Gt_{\max}^2}. \quad (6.44)$$

宇宙在 $t_{\text{end}} = 2t_{\max}$ 时终结，此时 $\psi = 2\pi$ ， a 再次为零。

³⁶或者说，本来应该推导。

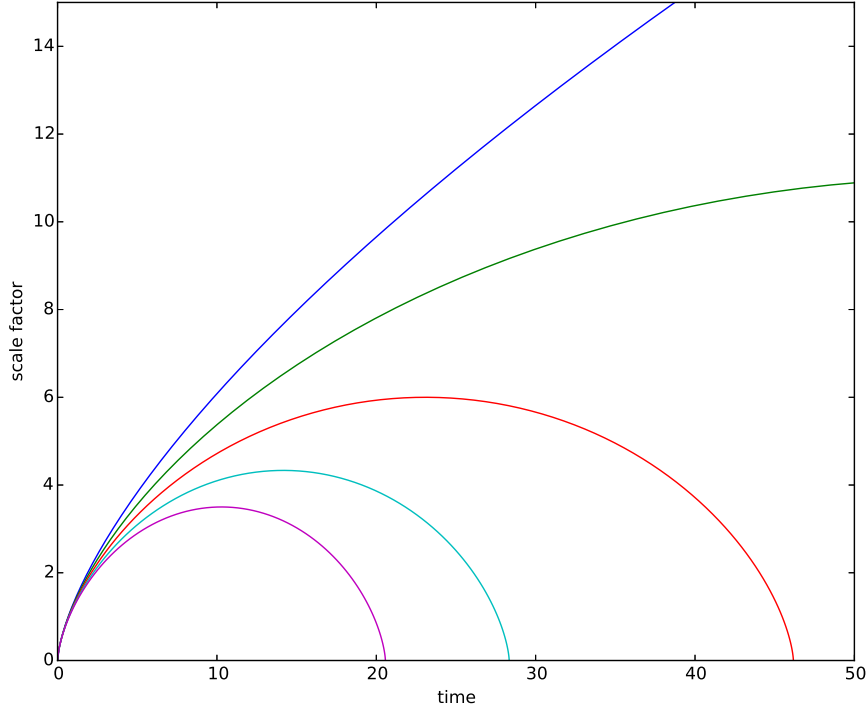


图 18: 平直物质主导宇宙的膨胀规律 (蓝色, 最上方曲线), 以及密度参数初始值 $\Omega_i > 1$ 不同的封闭物质主导宇宙的膨胀规律。两轴均为线性坐标, 单位任意。

球对称坍缩模型。 在平直的 ($\Omega = 1$)、物质主导的 FRW 宇宙中, 一个球对称超密区域也满足膨胀规律 (6.39)。用 $\bar{a}, \bar{H}, \bar{\rho}$ 表示这一平直背景宇宙的量。两个解使用相同的时间 t , 并且 $\bar{\Omega} = 1$, 所以不必再为它们另设记号。背景宇宙满足

$$\bar{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho} = \left(\frac{2}{3t}\right)^2 \Rightarrow \bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2}. \quad (6.45)$$

因此, 在 $t = t_{\max} \equiv t_{\text{ta}}$ 时, 现在称其为转向时刻, 超密区域的密度为

$$\rho(t_{\text{ta}}) = \frac{9\pi^2}{16} \bar{\rho}(t_{\text{ta}}) \approx 5.5517 \bar{\rho}(t_{\text{ta}}), \quad (6.46)$$

即转向时刻的密度反差为

$$\delta_{\text{ta}} = \frac{9\pi^2}{16} - 1 \approx 4.4417. \quad (6.47)$$

在此之前, 超密区域一直在膨胀, 只是比周围背景宇宙更慢。在转向时刻, 超密区域开始坍缩。

以上既适用于密度均匀的超密区域, 也适用于具有球对称密度轮廓的区域。在后一种情形中, 必须对每个球壳分别应用上述结果, 密度 ρ 指的不是球壳自身的密度, 而是壳内的平均密度, 因为影响球壳膨胀或收缩的引力由壳内总质量决定。为避免壳层交叉, 密度轮廓必须向外递减, 使外壳不先于内壳坍缩。³⁷

在适用于 $\delta \ll 1$ 的线性微扰论中, 平直物质主导宇宙的密度扰动按

$$\delta^{\text{lin}} \propto a \propto t^{2/3} \quad (6.48)$$

³⁷模型中还应超密区域周围包含一个欠密区域, 使两者合在一起的平均密度等于背景宇宙的密度, 从而不影响周围环境的演化。

增长。当密度反差 δ 变大时，它开始增长得更快。现在将线性增长规律与上面转向时刻的 δ 比较。

初始密度反差 δ_i 由 $\rho_i = (1 + \delta_i)\bar{\rho}_i$ 给出。另一方面，

$$\bar{H}_i^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}_i, \quad \Omega_i H_i^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_i, \quad (6.49)$$

所以

$$1 + \delta_i = \Omega_i \frac{H_i^2}{\bar{H}_i^2}, \quad \text{或在任意时刻} \quad 1 + \delta = \Omega \frac{H^2}{\bar{H}^2}. \quad (6.50)$$

因此，密度反差并不简单等于 $\Omega - \bar{\Omega} = \Omega - 1$ ，因为两个解的哈勃参数也不同。在 $\Omega - 1 \ll 1$ 、 $\psi \ll 1$ 的早期，将式 (6.40)、(6.41)，以及式 (6.45) 与 (6.39) 中的 $\Omega, H, \bar{H}$ 按 ψ 展开，就可以分辨 $\Omega_i - 1$ 与 $(H_i/\bar{H}_i)^2$ 各自的贡献，得到（练习）

$$\begin{aligned} \Omega_i &\approx 1 + \frac{1}{4}\psi_i^2, & \frac{H_i^2}{\bar{H}_i^2} &\approx 1 - \frac{1}{10}\psi^2 \\ \Rightarrow \quad 1 + \delta_i &\approx 1 + \frac{3}{20}\psi^2 & \Rightarrow \quad \delta_i &\approx \frac{3}{5}(\Omega_i - 1). \end{aligned} \quad (6.51)$$

现在可以给出转向时刻密度反差的线性预言：³⁸

$$\begin{aligned} \delta_{\text{ta}}^{\text{lin}} &= \frac{\bar{a}_{\text{ta}}}{\bar{a}_i} \delta_i = \left(\frac{t_{\text{ta}}}{t_i}\right)^{2/3} \delta_i \approx \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{\delta_i}{\Omega_i - 1} \\ &\approx \frac{3}{5} \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{2/3} \approx 1.0624, \end{aligned} \quad (6.52)$$

其中采用了近似

$$t_{\text{ta}} \approx \frac{\pi}{2} \bar{H}_i^{-1} \frac{1}{(\Omega_i - 1)^{3/2}}, \quad t_i = \frac{2}{3} \bar{H}_1^{-1}. \quad (6.53)$$

因此得出结论：当线性预言为 $\delta \sim 1$ 时，密度扰动开始坍缩，而此时真实密度扰动已经强于线性预言的四倍。

坍缩在 $t_{\text{coll}} = 2t_{\text{ta}}$ 时完成，对应封闭宇宙模型的 t_{end} ；此时线性预言给出

$$\delta_{\text{coll}}^{\text{lin}} = 2^{2/3} \delta_{\text{ta}}^{\text{lin}} \approx 1.6865. \quad (6.54)$$

以上小字部分的结论是：对于物质主导的平直背景宇宙，球对称超密区域在 t_{coll} 时已完成坍缩；每个超密区域都有自己的坍缩时刻 t_{coll} 。在该时刻，线性微扰论对密度扰动大小的预言为

$$\delta_{\text{coll}}^{\text{lin}} \approx 1.6865. \quad (6.55)$$

上述特例可推广到背景宇宙为封闭或开放的 Friedmann 模型，即物质主导的 FRW 宇宙 [29]，以及 Λ CDM 模型 [30]。另见文献 [2] 第 5.1 节，其中给出

$$\begin{aligned} \delta_{\text{coll}}^{\text{lin}} &\approx 1.686[\Omega(t_{\text{coll}})]^{0.0185} \quad (\text{开放或封闭宇宙}), \\ \delta_{\text{coll}}^{\text{lin}} &\approx 1.686[\Omega_m(t_{\text{coll}})]^{0.0055} \quad (\Lambda\text{CDM}), \end{aligned} \quad (6.56)$$

所以两种情形对 Ω_m 的依赖都很弱，一般可采用 $\delta_{\text{coll}}^{\text{lin}} \approx 1.68$ 。

我想，这些理想化情形会在中心形成黑洞。实际上，超密区域并不严格球对称，且偏离球对称的程度会随坍缩而增大。对于椭球形超密区域，最扁的方向最先坍缩，首先形成“Zel’dovich 薄饼”。当密度指星系系数密度、而非平滑的连续密度时，星系会以不同的距离掠过中心，而不像完全球对称情形那样在中心碰撞；随后它们远离中心并减速，最终落回并绕中心运动，形成星系团。

³⁸注意，Kolb 和 Turner [28] 第 328 页漏掉了因子 3/5。

6.4 维里化

在理想化的完全球对称情形中，所有质量最终坍缩为一点。实际上，我们预期在 t_{coll} 时得到一个系统，其中各质量在转向半径的一半以内绕中心运动，这称为维里化。此时密度是转向时密度的 8 倍，即 $(9/2)\pi^2\bar{\rho}(t_{\text{ta}}) \approx 44.4\bar{\rho}(t_{\text{ta}})$ 。在物质主导的情形中，宇宙在此期间的尺度增大了 $(t_{\text{coll}}/t_{\text{ta}})^{2/3}$ 倍，体积增大了 4 倍，因此密度反差增长到 $1 + \delta = 18\pi^2 \approx 178$ 。引述 Lyth 和 Liddle [31] 第 9.4 节：“数值模拟很好地验证了这一数值，它划分了已维里化的区域和物质仍在下落的区域；但存在宇宙学常数时，需要作一定调整。”

通常使用更整的数值 200：将暗晕边界定义为这样一个半径，其内部平均密度是暗晕形成时宇宙平均密度的 200 倍。暗晕是维里化的冷暗物质超密区域，可以包含一个或多个星系。常用记号 r_{200} 和 M_{200} 分别表示按这种方式定义的暗晕半径和质量。根据维里定理，系统动能等于引力势能的负二分之一，由此可根据暗晕质量估计冷暗物质粒子的典型速度。这假设粒子在维里化过程中没有损失能量，对冷暗物质应当成立。重子物质会因粒子相互作用而辐射能量，使重子成分落入系统更深处，在暗晕内部形成较小的发光星系，或多个星系。至少在星系内部区域，预期重子物质密度高于暗物质密度。

维里化后，密度反差仍会继续增长，因为维里化系统保持恒定密度，而背景宇宙继续膨胀。例如，在 $z \approx 3$ 或 7 时转向的超密区域，会在 $z \approx 1$ 或 3 时维里化，到现在其物质密度反差又增长了约 $2^3 = 8$ 或 $4^3 = 64$ 倍。暗晕具有密度轮廓，越向内部密度越高。

将这些密度与我们对银河系太阳邻域密度的了解作比较。维基百科的“近邻恒星与褐矮星列表”（2023 年 1 月 13 日）列出太阳系周围 20 光年，即 $r = 6.13 \text{ pc}$ ，以内的 110 颗恒星，总质量为 $45.96M_{\odot}$ 。此外，表中还有 20 颗褐矮星及两颗“次褐矮星或流浪行星”，总质量不到 $1M_{\odot}$ 。20 光年以内的体积为 $V = 965.8 \text{ pc}^3$ 。对于恒星，我想可以假设这一列表是完备的，由此得到恒星中重子物质的局部密度：

$$\rho_{\text{stars}} = 0.048M_{\odot}/\text{pc}^3. \quad (6.57)$$

Peacock [1] 在第 12.3 节谈及我们的邻域时写道：“加入气体和尘埃云的贡献后，发光物质的总密度为 $\rho_{\text{lum}} = 0.1M_{\odot}/\text{pc}^3$ ，例如见 Freedman (1987)。”他还指出，密度的动力学测定“往往给出比直接看到的更多的质量，但差异至多为两倍，而且可能根本不存在”。这与大致等量、或更少的冷暗物质相容。我希望找到一个更近的估计。假设 $h = 0.7$ ，当前临界密度为 $\rho_{\text{cr}0} = 1.36 \times 10^{-7}M_{\odot}/\text{pc}^3$ ；再假设 $\Omega_m = 0.3$ ，则有 $\bar{\rho}_m = 4.08 \times 10^{-8}M_{\odot}/\text{pc}^3$ ，因此局部密度 $0.1\text{--}0.2M_{\odot}/\text{pc}^3$ 对应于 $(2\text{--}5) \times 10^6$ 的密度反差。

7 红移空间

在星系巡天中，关于星系距离的信息通常是它的红移 z ，我们用它作为距离 r 的替代量。距离与红移的关系依赖于宇宙学；在 ΛCDM 中为

$$r(z) = H_0^{-1} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_m(1+z')^3 + (1-\Omega_m)}}. \quad (7.1)$$

这里 r 是共动距离。为简单起见，此处假设线性哈勃关系

$$r = H_0^{-1}z \quad \text{或} \quad z = H_0 r, \quad (7.2)$$

这是在 $z \ll 1$ 时成立的近似，忽略了星系的本动速度。对于单个星系，

$$z = H_0 r + v_r, \quad \text{其中} \quad v_r \equiv \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} \quad (7.3)$$

是本动速度 $\mathbf{v}$ 的径向分量。

(以下形式体系和结果也可用于较高红移, 只要将其应用于 $\Delta z \ll 1$ 的红移区间: 把星系巡天划分为红移分箱 $[z, z + \Delta z]$, 使该区间内的哈勃参数可近似为常数, 并用它代替 H_0 。)

我们沿用文献 [2] 第 6.3 节, 在本节以速度为距离单位, 即令 $H_0 = 1$ 。同时采用 $c = 1$, 所以速度, 以及现在的距离, 都是无量纲量。因此

$$1 = H_0^{-1} = 2997.92458 h^{-1} \text{Mpc} = c = 299792.458 \text{ km/s}. \quad (7.4)$$

可以把这套单位制称为哈勃单位制。星系的红移和距离于是满足

$$z = r + v_r. \quad (7.5)$$

为每个星系定义红移矢量 $\mathbf{z}$:

$$\mathbf{z} \equiv z \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + v_r \hat{\mathbf{r}} = \left(1 + \frac{v_r}{r}\right) \mathbf{r}. \quad (7.6)$$

它给出星系在红移空间中的位置。

由于 $v_r \hat{\mathbf{r}}$ 的贡献, 星系分布在红移空间中看起来不同。例如, 考虑球对称坍缩模型中距我们一定距离的一层星系壳: 在实空间中, 它们构成球面。球面较远的一侧具有朝向我们的本动速度, 较近的一侧则背离我们。因此, 这层壳在红移空间中显得扁平。在转向时刻, v_r 的贡献恰好抵消 r 的差别, 使壳在红移空间中压扁为垂直于视线的平盘。转向之后, 在实空间中较远的部分, 在红移空间中反而较近, 反之亦然; 平盘先膨胀为扁球面, 但随着 v 增长, 最终得到沿视线拉长的红移空间结构。星系团在红移空间中也呈现类似形态, 不过其星系在实空间与红移空间中位置的对应更复杂且相互混杂: 靠近中心的星系可以向内或向外运动。它们相对于星系团中心的速度大于星系团的半径 (记住, 这里比较的是无量纲量), 因此星系团看起来像指向观测者的细长结构, 即“上帝之指”。

这种红移空间畸变 (RSD) 起初似乎只是妨碍我们精确测量真实星系数密度场的麻烦。然而, 由于我们在理论上理解 RSD 的成因, 就可以将其用作宇宙学工具。它抹去了星系分布的部分信息, 却用另一类信息加以替代。RSD 告诉我们结构的增长率, 因此可用来检验广义相对论或修改引力。

7.1 作为实空间畸变的红移空间

以下只考虑不属于更大已坍缩系统的天体 (例如排除星系团中的单个星系), 以及足够大的、超密区域尚未达到转向时刻的结构, 以避免距离次序在红移空间中反转。因此, 本动速度通常很小, 约为 10^{-3} 或更低。它们由密度扰动场的引力产生 (第 6 节), 构成连续速度场 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ 。由式 (7.5),

$$\frac{dz}{dr} = 1 + \frac{\partial v_r}{\partial r}. \quad (7.7)$$

红移空间 $\{\mathbf{z}\}$ 是实空间 $\{\mathbf{r}\}$ 的畸变版本。将红移空间中的数密度及其相对扰动记为 $\rho^{(z)}$ 和 $\delta^{(z)}$ 。映射 $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{z}(\mathbf{r})$ 将体积元映为 $d^3 r \rightarrow d^3 z$ 。要求该映射为一一映射; 条件是 dz/dr 处处为正, 即不发生次序反转。这些体积元包含相同的星系:

$$\rho^{(z)}(\mathbf{z}) d^3 z = \rho(\mathbf{r}) d^3 r \quad \Rightarrow \quad [1 + \delta^{(z)}(\mathbf{z})] d^3 z = [1 + \delta(\mathbf{r})] d^3 r. \quad (7.8)$$

在我们所用的背景满足 $z = r$ 的模型中, 两空间的平均密度相同, 因为在足够大的体积内, 本动速度对体积的影响相互抵消。由 $d^3 r = r^2 dr d\Omega$ 、 $d^3 z = z^2 dz d\Omega$,

$$\frac{d^3 r}{d^3 z} = \left(\frac{r}{z}\right)^2 \frac{dr}{dz} = \frac{1}{(1 + v_r/r)^2} \left(1 + \frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^{-1}, \quad (7.9)$$

所以

$$1 + \delta^{(z)}(\mathbf{z}) = \frac{r^2}{(r + v_r)^2} \left(1 + \frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^{-1} [1 + \delta(\mathbf{r})]. \quad (7.10)$$

7.2 线性扰动与功率谱

现在采用线性微扰论近似，即扰动及其梯度都很小：

$$|\delta| \ll 1, \quad |\mathbf{v}| \ll 1, \quad |\nabla \delta| \ll 1, \quad |\nabla \mathbf{v}| \ll 1, \quad (7.11)$$

因而这些量的乘积为二阶小量，可以舍去。还另作一个近似，假设 $|v_r| \ll r$ ，即所考虑距离足够大，使本动速度远小于哈勃退行速度。于是式 (7.10) 可近似为

$$\delta^{(z)}(\mathbf{z}) \approx \delta(\mathbf{r}) - 2\frac{v_r}{r} - \frac{\partial v_r}{\partial r}. \quad (7.12)$$

此时 $\mathbf{z}$ 与 $\mathbf{r}$ 的差也很小，因此 $\delta^{(z)}(\mathbf{z})$ 与 $\delta^{(z)}(\mathbf{r})$ 之差为二阶小量，可以忽略。故

$$\delta^{(z)}(\mathbf{r}) \approx \delta^{(z)}(\mathbf{z}). \quad (7.13)$$

进一步假设

$$2\frac{v_r}{r} \ll \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad (7.14)$$

从而舍去 $2v_r/r$ 。这意味着所考察的结构，例如其特征波长，小于它们到我们的距离。现在有

$$\delta^{(z)}(\mathbf{r}) \approx \delta(\mathbf{r}) - \frac{\partial v_r}{\partial r}. \quad (7.15)$$

下一步转到傅里叶空间，其中

$$\nabla \rightarrow i\mathbf{k}. \quad (7.16)$$

如何处理 $\partial v_r/\partial r$ ？这里

$$\frac{\partial}{\partial r} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla, \quad v_r = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}. \quad (7.17)$$

方向矢量 $\hat{\mathbf{r}}$ 似乎带来问题，因为把 ∇ 替换为 $i\mathbf{k}$ 后，仍剩下这个坐标空间量，因此并未真正完全进入傅里叶空间。解决办法是平行平面近似：³⁹假设研究的结构相对于到我们的距离很小，于是可在一个体积为 V 的参考盒子内作傅里叶展开。盒子小而遥远，在我们看来只占很小的角度，即指向其中各处的方向矢量 $\hat{\mathbf{r}}$ 几乎平行。因此，在计算 $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{k}$ 时近似取

$$\hat{\mathbf{r}} \approx \text{const}. \quad (7.18)$$

这样便将视线方向 $\hat{\mathbf{r}}$ “外置”，使其不再是坐标空间变量。假设标量扰动，因而

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = v_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}}. \quad (7.19)$$

于是

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} \rightarrow i(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{k})(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}})v_{\mathbf{k}}, \quad (7.20)$$

式 (7.15) 变为

$$\delta_{\mathbf{k}}^{(z)} \approx \delta_{\mathbf{k}} - i(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 k v_{\mathbf{k}}. \quad (7.21)$$

$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \cos \vartheta_k$ 是波矢 $\mathbf{k}$ 与我们指向巡天区域的方向之间夹角 ϑ 的余弦。MBW [2] 将其记为 μ_k ，Peacock [1] 则只写 μ 。下文记为 $\cos \vartheta_k$ 。平行平面近似的关键在于将它视为仅依赖 $\mathbf{k}$ 方向的量。

现在假设衰减模已经消失，从而可使用线性增长模的结果 (6.28)：

$$-ikv_{\mathbf{k}} = aH\beta\delta_{\mathbf{k}} \approx \beta\delta_{\mathbf{k}}, \quad (7.22)$$

³⁹我想，这一名称来自将横向方向近似为平面、将径向方向近似为相互平行。

其中近似取 $aH \approx a_0 H_0 = H_0 = 1$, 与最初在 $z \ll 1$ 时采用线性哈勃关系的近似一致。于是式 (7.21) 变为

$$\delta_{\mathbf{k}}^{(z)} \approx [1 + \beta(\cos \vartheta_k)^2] \delta_{\mathbf{k}}. \quad (7.23)$$

这里 $\beta = f/b$, f 是我们希望测定以约束宇宙学和引力理论的增长率, b 是星系偏置因子。

定义红移空间中的功率谱 $P^{(z)}(\mathbf{k})$, 发现尽管实空间功率谱各向同性,

$$P^{(z)}(\mathbf{k}) \equiv V \langle |\delta_{\mathbf{k}}^{(z)}|^2 \rangle = (1 + 2\beta \cos^2 \vartheta_k + \beta^2 \cos^4 \vartheta_k) P(k) \quad (7.24)$$

却是各向异性的, 即通过 ϑ_k 依赖于 $\mathbf{k}$ 的方向。

可将 $P^{(z)}(\mathbf{k}) = P^{(z)}(k, \cos \vartheta_k)$ 的方向依赖按勒让德多项式 L_ℓ 展开:

$$P^{(z)}(k, \cos \vartheta_k) = \sum_{\ell} P_{\ell}^{(z)}(k) L_{\ell}(\cos \vartheta_k), \quad (7.25)$$

其中

$$P_{\ell}^{(z)}(k) \equiv \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 d \cos \vartheta_k L_{\ell}(\cos \vartheta_k) P^{(z)}(k, \cos \vartheta_k) \quad (7.26)$$

是 $P^{(z)}(\mathbf{k})$ 的多极矩。可以发现 (练习), 只有单极矩、四极矩和十六极矩⁴⁰非零:

$$\begin{aligned} P_0^{(z)}(k) &= (1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2) P(k), \\ P_2^{(z)}(k) &= (\frac{4}{3}\beta + \frac{4}{7}\beta^2) P(k), \\ P_4^{(z)}(k) &= \frac{8}{35}\beta^2 P(k). \end{aligned} \quad (7.27)$$

单极矩就是 $P^{(z)}(\mathbf{k})$ 对 $\mathbf{k}$ 方向的平均:

$$P_0^{(z)}(k) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{\mathbf{k}} P^{(z)}(\mathbf{k}). \quad (7.28)$$

可见, 红移空间效应使结构显得更强, $P_0^{(z)}(k) > P(k)$ 。原因是物质向高密度区域下落, 使其在红移空间中显得更扁、也就是更小。沿视线压扁对应正的四极矩, 即沿视线方向的结构显得更强。

由星系巡天可测定 $P_0^{(z)}(k)$ 、 $P_2^{(z)}(k)$ 和 $P_4^{(z)}(k)$, 再利用式 (7.27) 解出实空间的 $P(k)$ 和 $\beta = f/b$ 。

平行平面近似的思路与第 4.2 节的平坦天空近似类似。若要超越它, 就必须考虑球面几何, 并使用球谐函数和球贝塞尔函数。

7.3 相关函数

由于畸变, 红移空间相关函数

$$\xi^{(z)}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \equiv \langle \delta^{(z)}(\mathbf{z}_1) \delta^{(z)}(\mathbf{z}_2) \rangle \quad (7.29)$$

不是各向同性的。定义

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &\equiv \frac{1}{2}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) && \text{视线矢量,} \\ \mathbf{s} &\equiv \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 && \text{红移空间间隔矢量,} \\ s_{\parallel} &\equiv \hat{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{s} && \text{间隔的平行分量,} \\ s_{\perp} &\equiv \sqrt{s^2 - s_{\parallel}^2} && \text{间隔的垂直分量,} \\ \mu &\equiv s_{\parallel}/s = \cos \vartheta_s && \text{方向余弦.} \end{aligned} \quad (7.30)$$

⁴⁰多极矩按 2^ℓ 命名, 称为 “ 2^ℓ 极”: 单极对应 $2^0 = 1$, 四极对应 $2^2 = 4$, 十六极对应 $2^4 = 16$ 。

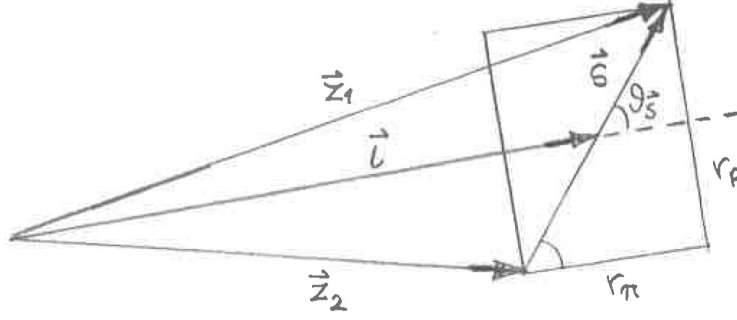


图 19: 红移空间中的平行分量和垂直分量; 这里将 $s_{\parallel}, s_{\perp}$ 记为 r_{π}, r_p 。

$s_{\parallel}, s_{\perp}$ 也可记为 π, σ 或 r_{π}, r_p 。在平行平面近似 $s_{\parallel}, s_{\perp} \ll l$ 下, $\xi^{(z)}$ 仅依赖 $s_{\parallel}, s_{\perp}$, 等价地, 也可用 s, μ 表示:

$$\xi^{(z)}(z_1, z_2) \approx \xi^{(z)}(s) = \xi^{(z)}(s_{\parallel}, s_{\perp}) = \xi^{(z)}(s, \mu). \quad (7.31)$$

这里的关键是将红移畸变近似为沿 l 、即 $s_{\parallel}$ 方向发生, 而不是沿 z_1 和 z_2 方向发生, 从而将畸变集中到 $s_{\parallel}$ 中。

7.3.1 线性增长模

在相关较弱、即 s 较大时, 可对 ξ 使用线性微扰论, 但为了使平行平面近似有效, s 仍须远小于巡天深度。

对于线性增长模, 可仿照式 (7.25) 将 $\xi^{(z)}(s, \mu)$ 按勒让德多项式展开:

$$\xi^{(z)}(s, \mu) = \sum_{\ell} \xi_{\ell}^{(z)}(s) L_{\ell}(\mu). \quad (7.32)$$

这不像功率谱那样容易, 因为 $\delta^{(z)}$ 与 δ 在傅里叶空间中的简单关系, 即式 (7.23),

$$\delta_{\mathbf{k}}^{(z)} \approx [1 + \beta(\cos \vartheta_k)^2] \delta_{\mathbf{k}} = \left[1 + \beta \left(\frac{k_z}{k} \right)^2 \right] \delta_{\mathbf{k}}, \quad (7.33)$$

在坐标空间中变为

$$\delta^{(z)}(\mathbf{z}) \approx \left[1 + \beta \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 (\nabla^2)^{-1} \right] \delta(\mathbf{x}). \quad (7.34)$$

因此, 傅里叶空间中的关系

$$P^{(z)}(\mathbf{k}) = \left[1 + \beta \left(\frac{k_z}{k} \right)^2 \right]^2 P(k) \quad (7.35)$$

在坐标空间中变为

$$\begin{aligned} \xi^{(z)}(s) &\approx \left[1 + \beta \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 (\nabla^2)^{-1} \right]^2 \xi(s) \\ &= \left[1 + 2\beta \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 (\nabla^2)^{-1} + \beta^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^4 (\nabla^2)^{-2} \right] \xi(s) \\ &= \xi(s) + 2\beta \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 F(s) + \beta^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^4 G(s). \end{aligned} \quad (7.36)$$

这里 $F(s)$ 和 $G(s)$ 是泊松方程的解:

$$\nabla^2 F = \xi, \quad \nabla^2 G = F. \quad (7.37)$$

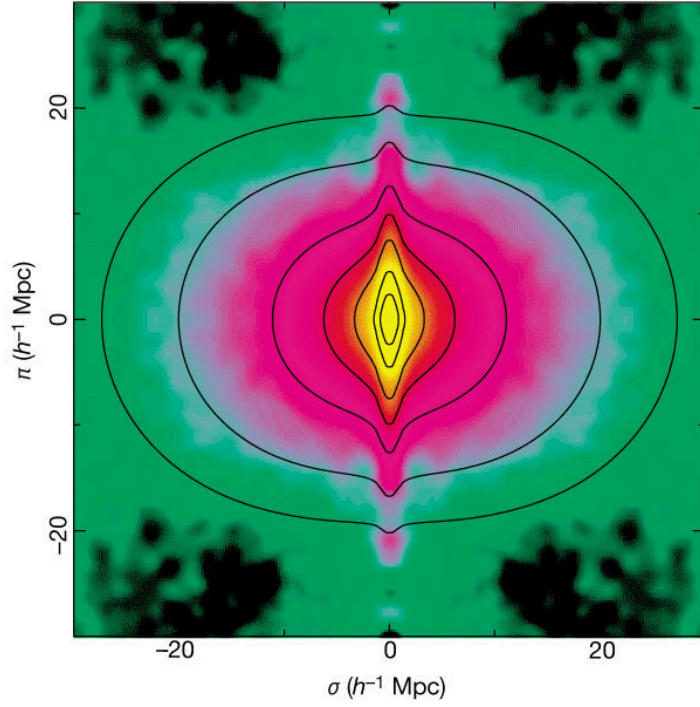


图 20: 2dFGRS 巡天测得的红移空间相关函数 $\xi^{(z)}(s_{\parallel}, s_{\perp})$, 这里将 $s_{\parallel}, s_{\perp}$ 记为 π, σ 。注意, $s_{\perp}$ 按定义为正, 因为它是柱坐标系的径向坐标。同样, $s_{\parallel}$ 也为正, 因为一对天体的间隔 s 只确定到一个正负号。这里仅将图形关于中央竖线和横线反射, 以使图像更美观, 并便于作三维解释。可以想象将其绕这条竖线旋转, 以表示假定 $\xi^{(z)}$ 不依赖的角坐标。所得三维图像给出红移空间中一个星系周围超密度的期望值。观测者从页面底部方向观看它。引自 Peacock 等 [32]。

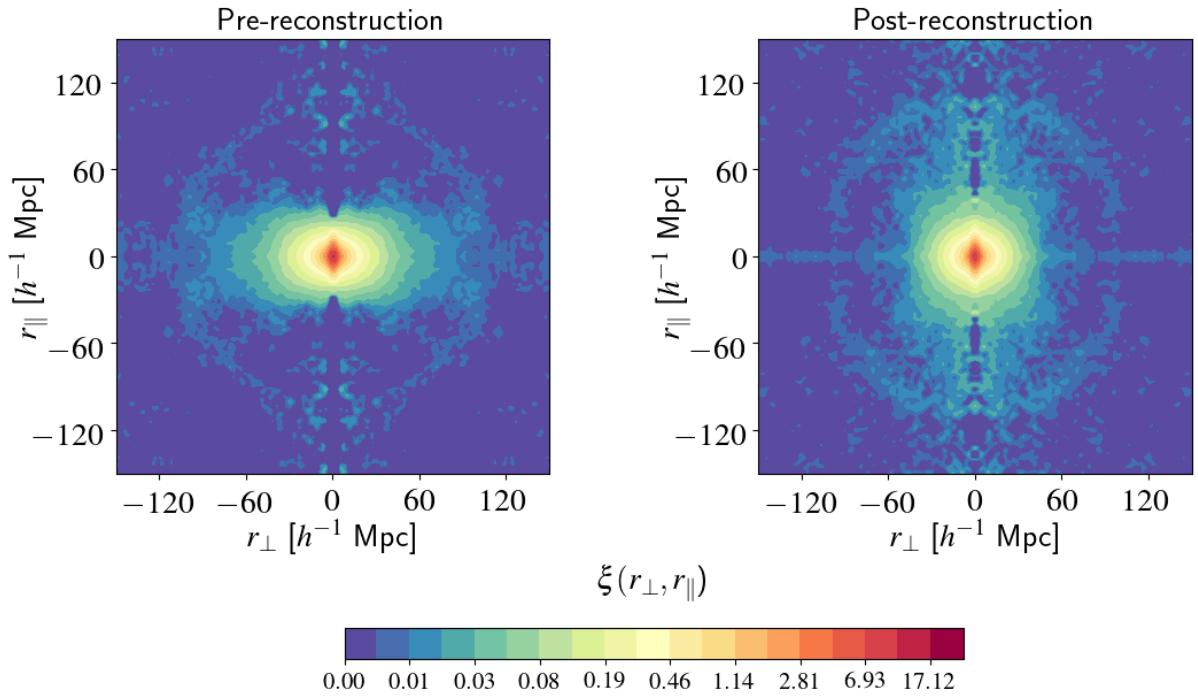


图 21: 左: 与图 20 相同, 但来自更新、规模更大的 eBOSS 巡天, 使用 BOSS 和 eBOSS 中红移为 $0.6 < z < 1$ 的 377 458 个亮红星系 (LRG)。右: 尝试校正星系位置的红移空间畸变之后的结果。注意 $r \approx 100 h^{-1} \text{Mpc}$ 处的环: 这是第 10 节讨论的 BAO 峰, 在图 2 中也可见。引自 Bautista 等 [33]。

泊松方程的解为⁴¹

$$F(\mathbf{s}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r \frac{\xi(r)}{|\mathbf{s} - \mathbf{r}|}, \quad (7.41)$$

其中可作展开（文献 [8] 式 12.4）

$$\frac{1}{|\mathbf{s} - \mathbf{r}|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} L_{\ell}(\cos \gamma), \quad (7.42)$$

$r_{<}$ 和 $r_{>}$ 分别是 s, r 中较小和较大的值, γ 是 $\mathbf{s}$ 与 $\mathbf{r}$ 的夹角。这里也许有些小题大做, 因为 $\xi(r)$ 的各向同性使式 (7.41) 中只有 $\ell = 0$ 项保留下来:

$$\begin{aligned} F(s) &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \int r^2 dr \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \xi(r) \int d\phi \int_{-1}^1 d\cos \gamma L_{\ell}(\cos \gamma) \\ &= -\int_0^{\infty} r^2 dr \frac{1}{r_{>}} \xi(r) = -\frac{1}{s} \int_0^s r^2 \xi(r) dr - \int_s^{\infty} r \xi(r) dr \\ &= -\frac{1}{s} J_3(s) - K_2(s), \end{aligned} \quad (7.43)$$

这里引入 J_{ℓ} 和 K_{ℓ} 积分, 虽然记号相同, 却与贝塞尔函数无关:

$$J_{\ell}(x) \equiv \int_0^x \xi(y) y^{\ell-1} dy, \quad K_{\ell}(x) \equiv \int_x^{\infty} \xi(y) y^{\ell-1} dy. \quad (7.44)$$

其导数为

$$J'_{\ell}(x) = x^{\ell-1} \xi(x), \quad K'_{\ell}(x) = -x^{\ell-1} \xi(x). \quad (7.45)$$

可见 $F(\mathbf{s}) = F(s)$ 各向同性。同样,

$$\begin{aligned} G(s) &= -\frac{1}{s} \int_0^s r^2 F(r) dr - \int_s^{\infty} r F(r) dr \\ &= \frac{1}{s} \int_0^s r dr \int_0^r y^2 \xi(y) dy + \frac{1}{s} \int_0^s r^2 dr \int_0^{\infty} \xi(y) y dy + \int_s^{\infty} [J_3(r) + r K_2(r)] dr \\ &= \frac{1}{s} \int_0^s dy y^2 \xi(y) \int_y^s r dr + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} dy y \xi(y) \int_0^{\min(s,y)} r^2 dr + \int_s^{\infty} [J_3(r) + r K_2(r)] dr \\ &= \frac{s}{2} J_3(s) - \frac{1}{6s} J_5(s) + \frac{s^2}{3} K_2(s) + \int_s^{\infty} [J_3(r) + r K_2(r)] dr. \end{aligned} \quad (7.46)$$

接着计算对 z 的偏导数。这里 z 是视线方向。由 $s^2 = x^2 + y^2 + z^2$, 有 $2s ds = 2x dx + 2y dy + 2z dz$, 以及

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{z}{s} = \cos \vartheta_s = \mu. \quad (7.47)$$

⁴¹这是电动力学中的常见内容。我学习电动力学已是很久以前, 不妨考虑我更熟悉、也更接近宇宙学主题的牛顿引力。引力势 Φ 由泊松方程给出:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \Rightarrow \Phi(\mathbf{s}) = -G \int d^3r \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{s} - \mathbf{r}|}, \quad (7.38)$$

其中 $\rho(\mathbf{r})$ 是质量密度。下面的结果 (7.43) 表明, 对于各向同性、即球对称质量分布,

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= -\frac{G}{s} \int_0^s 4\pi r^2 \rho(r) dr - G \int_s^{\infty} 4\pi r \rho(r) dr \\ &= -\frac{GM(s)}{s} - G \int_s^{\infty} 4\pi r \rho(r) dr, \end{aligned} \quad (7.39)$$

其中 $M(s)$ 是半径 s 以内的质量。引力场为 $-\nabla \Phi(s) = -\Phi'(s) \hat{\mathbf{s}}$, 所以

$$-|\nabla \Phi(s)| = -\Phi'(s) = -\frac{GM(s)}{s^2} + \frac{G}{s} M'(s) - 4\pi G s \rho(s) = -\frac{GM(s)}{s^2}, \quad (7.40)$$

即熟悉的距离平方反比律, 以及球对称质量分布的引力场仅依赖内部质量 $M(s)$ 这一熟悉性质。引力势中来自外部质量分布的第二个积分是必要的, 它使求梯度时积分限产生的贡献相互抵消, 即抵消 $M'(s)$ 的贡献。

得到 (练习)

$$\begin{aligned}\partial_z^2 F(s) &= \cdots = \mu^2 \xi(s) + (1 - 3\mu^2) \frac{J_3(s)}{s^3}, \\ \partial_z^4 G(s) &= \cdots = \mu^4 \xi(s) + \left(\frac{3}{2} - 9\mu^2 + \frac{15}{2}\mu^4\right) \frac{J_3(s)}{s^3} \\ &\quad + \left(-\frac{3}{2} + 15\mu^2 - \frac{35}{2}\mu^4\right) \frac{J_5(s)}{s^5}.\end{aligned}\tag{7.48}$$

最终有

$$\begin{aligned}\xi^{(z)}(s) &\approx \xi(s) + 2\beta \partial_z^2 F(s) + \beta^2 \partial_z^4 G(s) \\ &= [1 + 2\beta\mu^2 + \beta^2\mu^4]\xi(s) \\ &\quad + [\beta(2 - 6\mu^2) + \beta^2(\frac{3}{2} - 9\mu^2 + \frac{15}{2}\mu^4)] \frac{J_3(s)}{s^3} \\ &\quad + \beta^2[-\frac{3}{2} + 15\mu^2 - \frac{35}{2}\mu^4] \frac{J_5(s)}{s^5} \\ &= [1 + \beta(\frac{4}{3}L_2 + \frac{2}{3}) + \beta^2(\frac{8}{35}L_4 + \frac{4}{7}L_2 + \frac{1}{5})]\xi(s) \\ &\quad + [\beta(-4L_2) + \beta^2\frac{12}{7}(L_4 - L_2)] \frac{J_3(s)}{s^3} + \beta^2(-4L_4) \frac{J_5(s)}{s^5},\end{aligned}\tag{7.49}$$

所以相关函数的多极矩为

$$\begin{aligned}\xi_0^{(z)}(s) &= (1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2)\xi(s), \\ \xi_2^{(z)}(s) &= (\frac{4}{3}\beta + \frac{4}{7}\beta^2)\xi(s) + (-4\beta - \frac{12}{7}\beta^2) \frac{J_3(s)}{s^3} = (\frac{4}{3}\beta + \frac{4}{7}\beta^2)(\xi - \bar{\xi}), \\ \xi_4^{(z)}(s) &= \frac{8}{35}\beta^2\xi(s) + \frac{12}{7}\beta^2 \frac{J_3(s)}{s^3} - 4\beta^2 \frac{J_5(s)}{s^5},\end{aligned}\tag{7.50}$$

其中 $\bar{\xi}$ 是 ξ 的体积平均, 见式 (1.15)。

由于 $\xi(r)$ 通常随 r 增大而减小, $\xi(r) < \bar{\xi}(r)$, 四极矩 $\xi_2^{(z)}(s)$ 为负, 对应扁平形状。在图 20 的大尺度部分 ($r_p > 10 h^{-1}\text{Mpc}$) 可见这一点。在小尺度上线性理论不适用, 由于上帝之指效应, 四极矩为正, 即结构沿视线拉长。

由测得的 $\xi^{(z)}(r_\pi, r_p) = \xi^{(z)}(s, \mu)$ 可确定多极矩

$$\xi_\ell^{(z)}(s) = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 d\mu L_\ell(\mu) \xi^{(z)}(s, \mu),\tag{7.51}$$

红移空间单极矩的体积平均

$$\bar{\xi}_0^{(z)}(s) \equiv \frac{3}{s^3} \int_0^s \xi_0^{(z)}(r) r^2 dr = (1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2)\bar{\xi}(s),\tag{7.52}$$

以及四极矩与单极矩之比

$$q(s) \equiv \frac{\xi_2^{(z)}(s)}{\bar{\xi}_0^{(z)}(s) - \xi_0^{(z)}(s)} = \frac{-\frac{4}{3}\beta - \frac{4}{7}\beta^2}{1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2}.\tag{7.53}$$

上述第二个等号给出线性结果, 应在较大 s 时成立。最后一个等式可用于由大 s 处测得的 $q(s)$ 确定 β 。

文献 [33] 中, eBOSS 使用 $20 h^{-1}\text{Mpc} < s < 130 h^{-1}\text{Mpc}$ 的区间, 在红移分箱 $0.6 < z < 1.0$ 中测得有效红移 $z_{\text{eff}} = 0.698$ 处的 $\beta = 0.473 \pm 0.044$ 。⁴²在更小间隔上线性近似不成立, 而在更大间隔上相关太弱、因而不精确, 不能提供有用的额外信息。结果与采用标准广义相对论的 ΛCDM 模型一致。

⁴²这一数值实际上是对 $f\sigma_8$ 给出的, 它与 $\beta = f/b$ 几乎相同, 因为如第 6.1 节的一条脚注所述, 对星系有 $b \approx 1/\sigma_8$ 。

练习：联系三维相关函数与功率谱的多极矩。 假设相关函数和功率谱的方向依赖仅通过相对于视线方向的夹角 ϑ 出现，可以展开为

$$\xi(r, \vartheta) = \sum_{\ell} \xi_{\ell}(r) L_{\ell}(\cos \vartheta), \quad P(r, \vartheta) = \sum_{\ell} P_{\ell}(r) L_{\ell}(\cos \vartheta). \quad (7.54)$$

利用 ξ 与 P 构成三维傅里叶变换对，证明

$$\xi_{\ell}(r) = \frac{i^{\ell}}{2\pi^2} \int k^2 dk j_{\ell}(kr) P_{\ell}(k). \quad (7.55)$$

提示：我将展开推广到球谐展开，并使用式 (5.30)：

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = 4\pi \sum_{\ell m} i^{\ell} j_{\ell}(kx) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}). \quad (7.56)$$

7.3.2 投影相关函数

在平行平面近似中，红移效应沿 $s_{\parallel}$ 方向（图 23 中的 r_{π} ）移动星系，因此 $s_{\perp} = r_{\perp}$ （图中的 r_p ）。于是对 $s_{\parallel}$ 积分时，

$$w_p(r_{\perp}) \equiv \int_{-\pi_{\max}}^{\pi_{\max}} \xi^{(z)}(s_{\parallel}, s_{\perp}) ds_{\parallel} = \int_{-\pi_{\max}}^{\pi_{\max}} \xi(r(r_{\parallel}, r_{\perp})) dr_{\parallel}, \quad (7.57)$$

其中 $\xi(r(r_{\parallel}, r_{\perp})) \equiv \xi(\sqrt{r_{\parallel}^2 + r_{\perp}^2})$ ，这些效应相互抵消，从 $\xi^{(z)}$ 和 ξ 得到相同的积分，因为沿固定 $r_{\perp}$ 对应的线捕获了相同的星系。 $w_p(r_{\perp})$ 称为投影相关函数； $\pi_{\max}$ 应足够大，使更远处的相关可忽略，从而可将其替换为 ∞ 。由于

$$r = \sqrt{r_{\parallel}^2 + r_{\perp}^2}, \quad r_{\parallel} = \sqrt{r^2 - r_{\perp}^2}, \quad dr_{\parallel} = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - r_{\perp}^2}}, \quad (7.58)$$

有

$$w_p(r_{\perp}) = 2 \int_{r_{\perp}}^{\infty} \xi(r) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - r_{\perp}^2}}. \quad (7.59)$$

因子 2 来自同时计入负、正两个方向的 r_{π} 。

可根据式 (7.57) 由测得的 $\xi^{(z)}$ 确定 w_p ，并从式 (7.59) 解出实空间相关函数 $\xi(r)$ ，这依赖于 ξ 各向同性的假设。式 (7.59) 是 Abel 积分方程的一种形式（文献 [8]，练习 16.2.7）。将其写作

$$w_p(y) = \int_y^{\infty} \xi(r) \frac{2r dr}{(r^2 - y^2)^{\alpha}}. \quad (7.60)$$

这里 $\alpha = 1/2$ ，但我觉得这样推广后求解过程更清楚。乘以 $(y^2 - r_0^2)^{\alpha-1}$ 并积分来求解（练习）：

$$\int_{r_0}^{\infty} y dy (y^2 - r_0^2)^{\alpha-1} w_p(y) = \int_{r_0}^{\infty} y dy (y^2 - r_0^2)^{\alpha-1} \int_y^{\infty} \xi(r) \frac{2r dr}{(r^2 - y^2)^{\alpha}}. \quad (7.61)$$

这一二维积分覆盖 (y, r) 平面中 $r > y > r_0$ 的楔形区域，因此可重新排列为

$$\int_{r_0}^{\infty} r dr \xi(r) \int_{r_0}^r 2y dy \frac{(y^2 - r_0^2)^{\alpha-1}}{(r^2 - y^2)^{\alpha}}. \quad (7.62)$$

第二个积分经换元 $x = (y^2 - r_0^2)/(r^2 - r_0^2)$ 得到贝塔函数 $B(\alpha, 1 - \alpha)$ 。由于 $B(1/2, 1/2) = \pi$ ，

$$\int_{r_0}^{\infty} r dr \xi(r) = \frac{1}{\pi} \int_{r_0}^{\infty} y dy \frac{w_p(y)}{\sqrt{y^2 - r_0^2}}. \quad (7.63)$$

分部积分并对 r_0 求导，得到最终的反投影相关函数（练习）：

$$\xi(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{w_p'(y) dy}{\sqrt{y^2 - r^2}}. \quad (7.64)$$

这些结果同时适用于小尺度和大尺度，不要求 ξ 很小。

7.4 小尺度

在结构已坍缩、 $\xi(r)$ 很大的小尺度上，星系绕这些结构的中心运动。径向速度大致是随机的，可用速度弥散 σ_v 描述。它们对红移空间相关函数的影响变成与径向速度分布的卷积。以后应该在这里补充对此的讨论。

7.5 Friedmann–Robertson–Walker 宇宙中的红移空间

应当考虑背景宇宙的度规。这里回顾并推广“宇宙学 I”的一些结果。

均匀、各向同性宇宙的度规是 Robertson–Walker 度规：

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2 \right] \\ &= -dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + f_K^2(\chi)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2)], \end{aligned} \quad (7.65)$$

其中

$$f_K(\chi) \equiv \begin{cases} K^{-1/2} \sin(K^{1/2}\chi), & K > 0, \\ \chi, & K = 0, \\ |K|^{-1/2} \sinh(|K|^{1/2}\chi), & K < 0. \end{cases} \quad (7.66)$$

常数 K 决定宇宙的空间曲率，尺度因子 $a(t)$ 描述宇宙膨胀， r 和 χ 是径向坐标的两种选择。时刻 t 的宇宙空间曲率半径为 $a(t)/\sqrt{|K|}$ ，相应的共动曲率半径为 $r_{\text{curv}} = 1/\sqrt{|K|}$ 。采用 $a_0 = 1$ 的归一化，因此 $a = 1/(1+z)$ 。

相关距离概念与红移的关系为：共动距离

$$D_C(z) = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (7.67)$$

角直径距离

$$D_A(z) = \frac{1}{1+z} f_K \left(\int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right), \quad (7.68)$$

以及共动角直径距离

$$D_M(z) = f_K \left(\int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right). \quad (7.69)$$

它们与度规中所用坐标的关系为

$$D_C(z) = \chi, \quad D_M(z) = r. \quad (7.70)$$

两个星系间的间隔 $\mathbf{s} = (s_{\parallel}, s_{\perp})$ 在观测中表现为天空角间隔 $\Delta\vartheta$ 和红移差 Δz ，于是

$$s_{\parallel} \approx \frac{\Delta z}{H(z)}, \quad s_{\perp} \approx D_M(z) \Delta\vartheta. \quad (7.71)$$

两者都采用小间隔近似：对 $s_{\parallel}$ ，近似认为 Δz 内 H 不变；对 $s_{\perp}$ ，采用小角度近似， $K = 0$ 时为 $\sin(\Delta\vartheta/2) \approx \Delta\vartheta/2$ ， $K \neq 0$ 时则有所不同。

哈勃参数 $H(t) \equiv \dot{a}/a$ 由 Friedmann 方程给出：

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{K}{a^2}. \quad (7.72)$$

对于包含辐射、物质，以及状态方程为⁴³

$$w \equiv w_0 + w_a(1-a) \quad (7.73)$$

⁴³这不是具有物理动机的暗能量状态方程（并不存在这样的状态方程），而只是一个唯象的双参数模型，我们尝试用它拟合从 $z = 0$ 到几的红移范围内的数据。在更高红移时，暗能量对时空几何应有可忽略的影响，前提是其状态方程参数 w 始终充分小于 0。

的暗能量的宇宙，哈勃参数演化为（练习）

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_w(1+z)^{3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a z/(1+z)}}. \quad (7.74)$$

这里 $\Omega_r, \Omega_m, \Omega_w$ 是当前辐射、物质、暗能量密度占临界能量密度之比，并且

$$\Omega_k \equiv -\frac{K}{H_0^2}. \quad (7.75)$$

对于平直宇宙，

$$D_M(z) = D_C(z) = r = \chi \quad (K = 0), \quad (7.76)$$

空间几何为欧几里得几何，可将星系的观测坐标 z, θ, ϕ 简单转换为笛卡尔红移空间坐标：

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta, \quad (7.77)$$

其中

$$r = D_C(z). \quad (7.78)$$

因此，使用的是共动坐标，随宇宙膨胀的结构具有固定尺寸。

不过，必须知道宇宙学才能知道 $D_C(z)$ 。如果我们正要用星系分布确定宇宙学，该怎么办？通常先假设一个基准宇宙学，将观测星系的位置和红移转换为笛卡尔红移坐标。为了与其他宇宙学的预言比较，再理论计算：若用这个错误的基准宇宙学转换坐标，观测相关函数和功率谱应呈现怎样的形式。当基准宇宙学与真实宇宙学相差不太远时，这一方法最有效。

对开放 ($K < 0$) 或封闭 ($K > 0$) 宇宙，情况更棘手。幸运的是，Planck 和 BAO 观测将宇宙约束在接近平直的范围， $|\Omega_k| < 0.0026$ (68% 置信水平) [34]，所以曲率半径远大于当前哈勃距离：

$$r_{\text{curv}} = H_0^{-1} / \sqrt{|\Omega_k|} > 19.6 H_0^{-1} = 58\,800 h^{-1} \text{Mpc}. \quad (7.79)$$

这是假设只以曲率作为额外扩展的 Λ CDM 宇宙学。因此，可以选择平直的基准宇宙学，但仍须考虑曲率如何影响理论预言。由于演化效应，深巡天的相关函数和功率谱会在不同红移区间，即红移分箱中分别估计。要评估某个分箱 $[z_{\min}, z_{\max}]$ 的巡天体积内几何偏离平直的程度，须将径向共动范围 $D_C(z_{\max}) - D_C(z_{\min})$ ，通常小于 $1000 h^{-1} \text{Mpc}$ ，与 r_{curv} 比较。对于相关函数，通常只关心小于 $r_{\max} \sim 200 h^{-1} \text{Mpc} \ll r_{\text{curv}}$ 的星系间隔，所以第 1 节基于欧几里得几何对 $\xi(r)$ 的讨论应当很好地成立。曲率影响膨胀率，进而影响密度扰动增长，因此可以用曲率直接几何效应可忽略的小尺度测量，间接约束 Ω_K 。

第 7.1–7.3 节分析的另一问题，是哈勃参数随红移变化。该分析涉及如何把红移差转换为径向、即视线方向的距离差。现在式 (7.2) 中的 $s_{\parallel} = H_0^{-1} \Delta z$ 应换成

$$s_{\parallel} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{H(z')} \approx H(z)^{-1} \Delta z. \quad (7.80)$$

因此，只要在红移分箱内能将 H 近似为常数，关于相关函数和功率谱多极矩的分析及结果就成立。当然， $\xi(r)$ 、 $P(k)$ 和 $\beta = f/b$ 也随时间演化、因而依赖红移，所以测得的是分箱内某种平均值。使用较窄的分箱可减小演化效应，但也损失统计量，尤其是视线方向的统计量；分箱厚度至少应与 $r_{\max}$ 一样大。

星系巡天关于 $\beta = f/b$ 的结果通常以 $f(z)\sigma_8(z)$ 表示，其中 σ_8 是线性理论对半径 $R = 8 h^{-1} \text{Mpc}$ 球内质量密度涨落均方根、即方差平方根的预言，也就是顶帽窗的 $\sigma_T(8 h^{-1} \text{Mpc})$ 。星系巡天测量 $\sigma_g = b\sigma$ ，将 β 和 σ_g 两个测量相乘，就得到与偏置无关、可直接与宇宙学模型预言比较的 $f\sigma_8$ 。⁴⁴ σ_8

⁴⁴ 这一讨论还缺少一环，因为测得的 σ_g 也包含非线性效应的贡献。非线性与线性 σ 的关系由数值模拟给出。

的红移依赖正比于增长函数 $D(z)$ ，所以

$$\sigma_8(z) = \frac{D(z)}{D(z=0)} \sigma_8. \quad (7.81)$$

当前值为 $\sigma_8(z=0) \sim 0.8$ ：假设 Λ CDM，Planck 得到⁴⁵ $\sigma_8 = 0.811 \pm 0.006$ [34]，最佳拟合 Λ CDM 模型为 $\sigma_8 = 0.8120$ 。图 24 绘出 Planck 2018 最佳拟合 Λ CDM 模型的 $f(z)\sigma_8(z)$ ，并与增长指数 γ 较大或较小的修改引力情形比较。目前（2021 年），这方面最重要的结果来自 SDSS BOSS（重子振荡光谱巡天）[35] 和 eBOSS（扩展 BOSS）[61] 巡天，见图 25 和 27。

7.6 Alcock–Paczynski 效应

考虑远处一组呈球形分布的天体，例如星系，其本动速度可忽略，以避免红移空间畸变；因此它随宇宙膨胀，构成具有某一共动半径 r 的共动球。在红移空间中，这个球的横向和视线方向尺度也相等：

$$s_{\parallel} = \frac{\Delta z}{H(z)} = s_{\perp} = D_M(z)\Delta\vartheta, \quad (7.82)$$

于是

$$\frac{\Delta z}{\Delta\vartheta} = D_M(z)H(z) \equiv F_{\text{AP}}(z). \quad (7.83)$$

观测 Δz 和 $\Delta\vartheta$ ，便可确定宇宙的 Alcock–Paczynski 参数 $F_{\text{AP}}(z)$ 。无需知道球的尺寸 r ，只需知道其形状为球形。Alcock 和 Paczynski [36] 于 1979 年提出这一宇宙学检验，尤其用于检验非零宇宙学常数的存在。不同宇宙学具有不同的 $F_{\text{AP}}(z)$ 。并不一定需要球体，这里只是为了便于讲解；Alcock–Paczynski 检验只要求各向同性分布，例如各向同性的 $\xi(r)$ 。这一检验的强大之处在于无需校正演化效应。

Alcock–Paczynski 检验的弱点是会受到本动速度污染，因为它要求红移空间中的各向同性。反过来，如果试图测量红移空间相关函数或功率谱的各向异性，即多极矩，而基准宇宙学的 $F_{\text{AP}}(z)$ 与真实值不同，就会得到错误的各向异性。因此，一个各向同性分布在观测中呈现的各向异性有两种贡献：本动速度导致的真实红移空间畸变，以及使用错误基准宇宙学导致的 Alcock–Paczynski 效应。

⁴⁵注意，这并不是对 σ_8 的测量。Planck 观测早期宇宙，而 σ_8 对应当前宇宙。先用 Planck 数据拟合所选宇宙学模型的参数，再对拟合后的模型理论计算当前的 σ_8 应为何值。

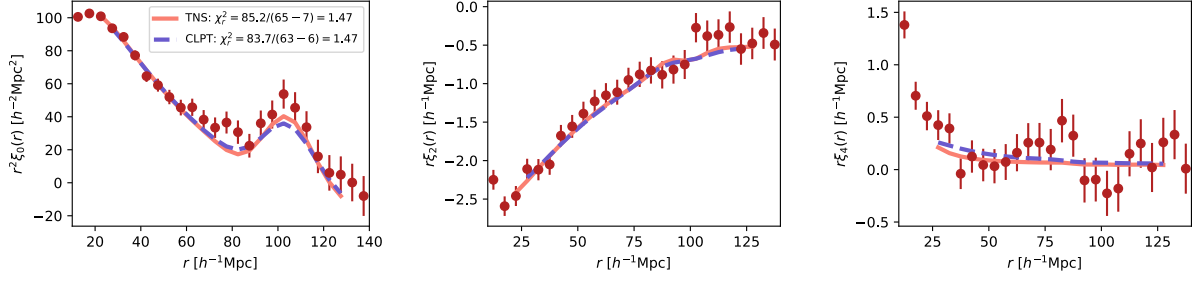


图 22: eBOSS 巡天的多极矩 $\xi_\ell^{(z)}(s)$, 即图 21 左图所示相关函数的多极矩。注意图中绘制的是 $s^2 \xi_0^{(z)}(s)$ (左)、 $s \xi_2^{(z)}(s)$ (中) 和 $s \xi_4^{(z)}(s)$ (右)。每幅图中的两条实线, 是对两种包含非线性效应的理论模型作数据拟合的结果。引自 Bautista 等 [33]。

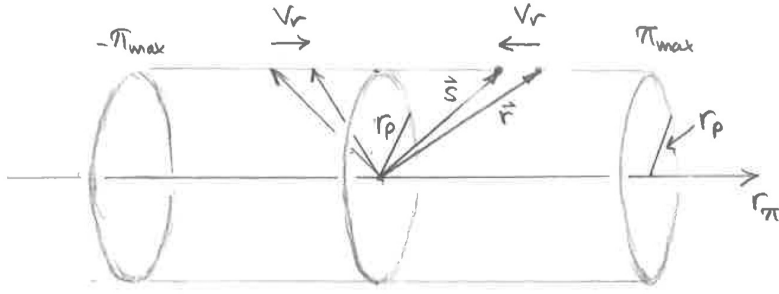


图 23: 固定的 r_p 对应以参考星系为中心的圆柱面。红移畸变沿 r_π 方向移动其他星系的相对位置。

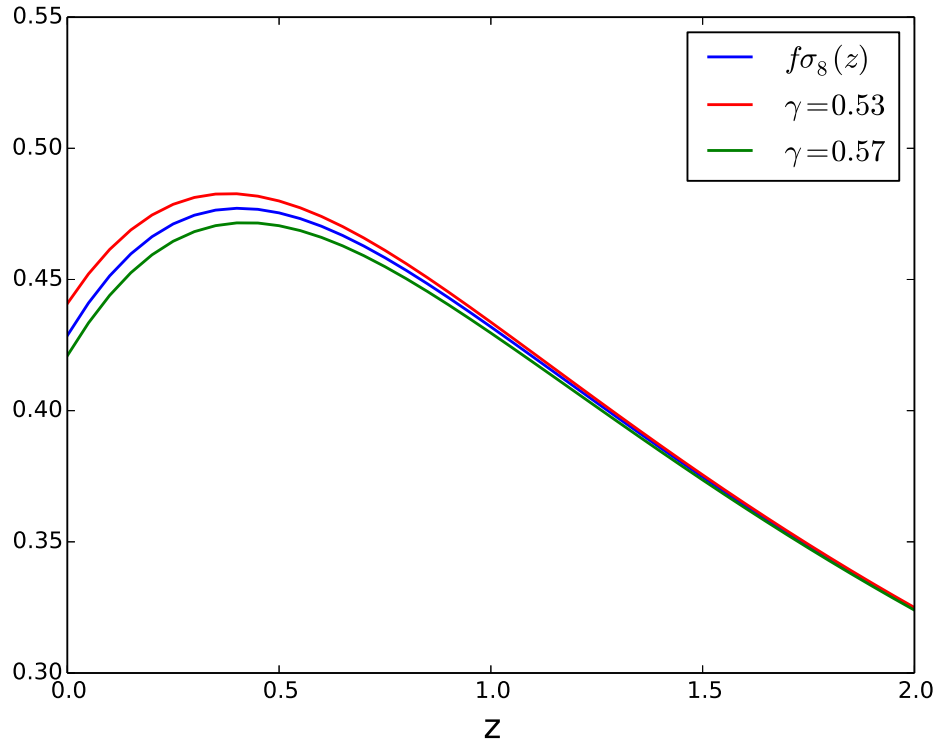


图 24: Planck 2018 最佳拟合 Λ CDM 模型 ($\Omega_m = 0.3158$ 、 $\sigma_8 = 0.8120$) 对应的理论 $f(z)\sigma_8(z)$, 与增长指数为 $\gamma = 0.53$ 和 $\gamma = 0.57$ 时比较。Euclid 应能区分这些情形。

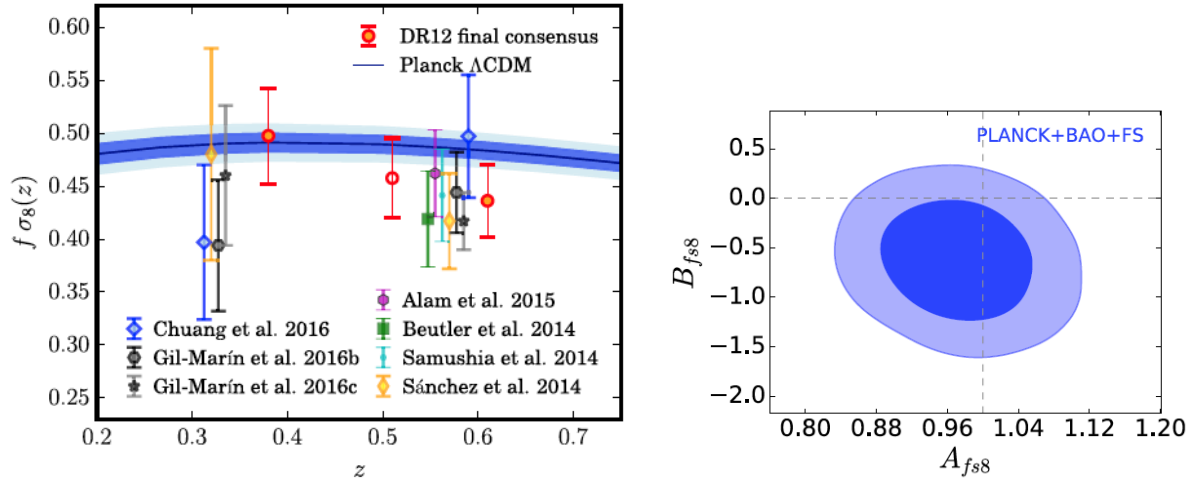


图 25: 左: BOSS 巡天在不同红移测得的 $f\sigma_8$ 。最新结果是文献 [35] 的 “DR12 final consensus”。这是该文图 15 的左图。带蓝色误差带的曲线是参数由 Planck 数据确定的 Λ CDM 模型预言。可将它与图 16 中的 $D(z)f(z)$ 比较, 但 $D(z)$ 的归一化与 $\sigma_8(z)$ 不同。右: BOSS 数据对增长函数的唯象双参数修改 $f\sigma_8 \rightarrow f\sigma_8[A + B(z - z_p)]$ 的约束, 给出 68% 和 95% 置信水平; 枢轴红移 $z_p = 0.51$ 选在巡天中央。数据与无修改的 $A = 1, B = 0$ 一致, 即符合广义相对论预言。这是文献 [35] 的图 20。更新结果见图 27。

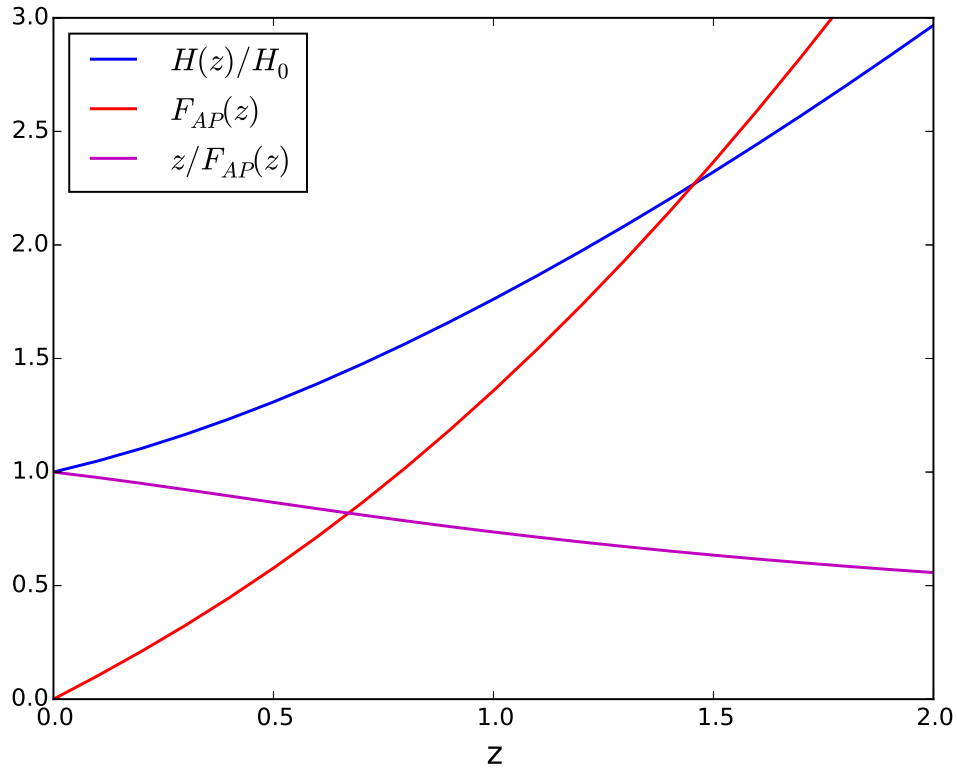


图 26: $\Omega_m = 0.3$ 的 Λ CDM 模型中, 哈勃参数 $H(z)$ 和 Alcock–Paczynski 参数 $F_{AP}(z)$ 随红移的变化。

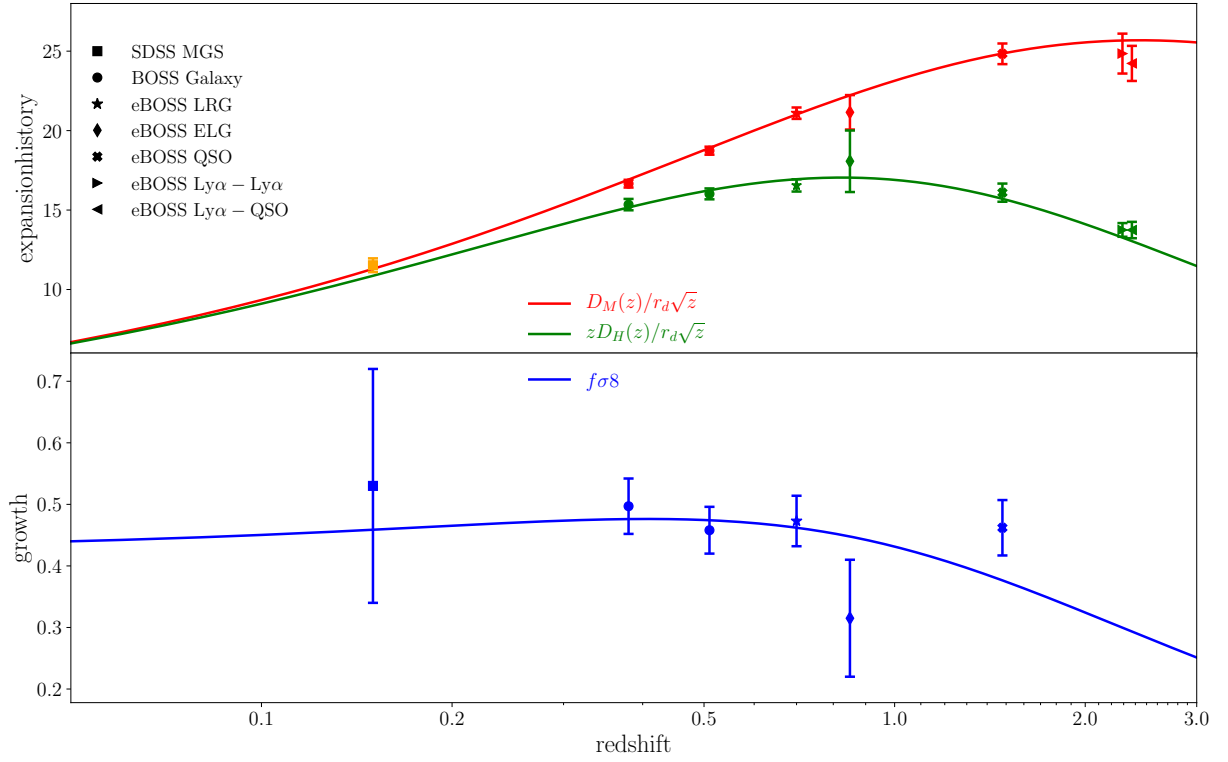


图 27: 下: eBOSS 巡天在不同红移测得的 $f\sigma_8$ 。左起第四个点, 有效红移 $z \approx 0.7$, 来自图 21 中 $0.6 < z < 1$ 的 LRG 样本。蓝线是 Planck 2018 最佳拟合 Λ CDM 模型的理论预言, 见图 24。注意这里的 z 轴为对数轴, 而图 24 中为线性轴。上: eBOSS 用 BAO 作为标准尺得到的距离、即膨胀历史测量, 第 10 节将讨论这一内容。这是文献 [61] 的图 1。

8 相关函数的测量

从数据估计相关函数的方法，基于将其定义为找到星系对的超额概率。从数据星表中统计间隔满足 $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \in r \pm \Delta r/2$ 的星系对计数 $DD(r)$ ，其中 Δr 是分箱宽度。下文的“间隔 r ”均指间隔落在这一分箱内。其中哪一部分是超额？应当与 $\xi = 0$ 、即泊松过程中的点对计数比较。为此，在巡天体积中随机投放点，形成泊松过程，生成随机星表，并统计对应的随机对计数 $RR(r)$ 。得到估计量

$$1 + \hat{\xi}(r) \equiv \frac{DD(r)}{RR(r)}. \quad (8.1)$$

这里假设数据星表和随机星表均取自具有相同 $\langle \rho \rangle$ 的系综。

不可避免的问题是我们不知道真实期望值 $\langle \rho \rangle$ ，必须用数据估计，将其替换为 N_D/V ，其中 N_D 是数据点数，即观测星系数， V 是巡天体积。于是估计量 (8.1) 假设随机点数与数据点数相等， $N_R = N_D$ 。

数据星表和随机星表固有的随机性都会使估计量产生随机误差。点数越多，预期误差越小。增加随机点数只需要计算机时间，比需要望远镜时间的增加数据点数便宜得多，因此通常采用 $N_R \gg N_D$ ，例如 $N_R = 50N_D$ ，以尽量减小随机点数有限导致的随机误差。此时须按随机对总数 $N_R(N_R - 1)/2$ 与数据对总数 $N_D(N_D - 1)/2$ 之比缩放估计量。因此，第一个估计量为

$$1 + \hat{\xi}_1(r) \equiv \frac{N_R(N_R - 1)}{N_D(N_D - 1)} \frac{DD(r)}{RR(r)}. \quad (8.2)$$

推广到各向异性的 $\xi(\mathbf{r})$ 。 为简单起见，本章以 $\xi(r)$ 表述，仿佛可以假设相关函数 $\xi(\mathbf{r})$ 各向同性。实际上，星系红移巡天在红移空间中观测，其中 $\xi^{(z)}(\mathbf{z})$ 各向异性。只需将各处的 r 换成 $\mathbf{r}$ 或 $\mathbf{z}$ ，并将其理解为三维空间中的某个分箱，本章全部讨论就可直接推广到三维函数 $\xi^{(z)}(\mathbf{z})$ 或二维函数 $\xi^{(z)}(s, \mu)$ ；应用结果之前无需指定分箱。因此，分箱可以例如表示二维分箱 $s \pm \Delta s, \mu \pm \Delta \mu$ 。

蒙特卡洛积分。 使用随机星表可以看作蒙特卡洛积分。找到间隔为 r 的星系对的概率，见式 (2.10)，为

$$dP \equiv \langle \rho \rangle^2 [1 + \xi(r)] dV_1 dV_2. \quad (8.3)$$

因此，间隔为 r 的星系对计数 $DD(r)$ 的期望为

$$\langle DD(r) \rangle = \frac{1}{2} \langle \rho \rangle^2 \int [1 + \xi(r)] \Theta_{12}(r) dV_1 dV_2, \quad (8.4)$$

其中

$$\Theta_{12}(r) \equiv \begin{cases} 1, & |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \in r \pm \frac{1}{2} \Delta r, \\ 0, & \text{其他情况,} \end{cases} \quad (8.5)$$

应将它与

$$\langle \rho \rangle^2 V_p(r) \equiv \frac{1}{2} \langle \rho \rangle^2 \int \Theta_{12}(r) dV_1 dV_2 \quad (8.6)$$

比较。 $V_p(r)$ 是对空间 $\{\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}\}$ 中间隔落在该分箱内的对所占的体积。因子 $1/2$ 使每对只计数一次，即抵消 dV_1, dV_2 都遍历相同位置造成的重复。得到估计量

$$1 + \hat{\xi}(r) \equiv \frac{DD(r)}{\langle \rho \rangle^2 V_p(r)}. \quad (8.7)$$

如何计算 $V_p(r)$ ？它是 $2d$ 维对空间中的复杂体积。对由某个条件定义的复杂形状区域作多维积分，一种标准方法是蒙特卡洛积分：在包围它的简单形状体积中按泊松过程随机投点，统计满足区域归

属条件的点数。它占全部点的比例，就估计了该区域占包围体积的比例。在这里，就是在巡天体积内随机投点，并统计这些点中间隔为 r 的随机对计数 $RR(r)$ 。当随机点数 N_R 足够大时，

$$RR(r) \approx \rho_R^2 V_p(r) \approx \frac{N_R(N_R - 1)}{V^2} V_p(r) \equiv G_p(r) \frac{1}{2} N_R(N_R - 1), \quad (8.8)$$

其中

$$G_p(r) \equiv \frac{V_p(r)}{\frac{1}{2} V^2} \quad (8.9)$$

是对空间中对分箱 r 的比例。这里 $\rho_R = N_R/V$ 是随机点密度， $N_R(N_R - 1)/2$ 是随机对总数。因此估计量为

$$1 + \hat{\xi}(r) \equiv \frac{\rho_R^2 DD(r)}{\langle \rho \rangle^2 RR(r)}, \quad (8.10)$$

将密度平方之比换成总对数之比后，它与式 (8.2) 相同。

星系巡天只观测单个实现中的有限体积，因此除 N_D/V 与 $\langle \rho \rangle$ 的差别外，所得 $\hat{\xi}(r)$ 还会因其他原因偏离真实 $\xi(r)$ 。边缘效应可以放大这一随机误差。

用一个极端例子说明边缘效应。设典型成团方式是每个巡天体积内有一个由 100 个星系组成的紧密星系团，除此之外没有其他星系。若该团远离巡天边界，得到 $\frac{1}{2} \times 100 \times 99 = 4450$ 个近邻对。若在巡天边缘有两个这样的团，每个只有一半包含在巡天内，则只得到 $2 \times (\frac{1}{2} \times 50 \times 49) = 2450$ 个近邻对。因此，同一星系分布的两个不同样本会在小 r 处给出相差很大的 $\xi(r)$ 估计。可以尝试以数据-随机对代替随机-随机对，减小这种边缘效应。数据-随机对总数是 $N_D N_R$ 。由于随机点与数据点不相关，间隔为 r 的数据-随机对计数 $DR(r)$ 不受相关函数 $\xi(r)$ 影响。因此， $DD(r)$ 相对于 $DR(r)$ 的超额衡量相关性，得到第二个估计量：

$$1 + \hat{\xi}_2(r) = 1 + \hat{\xi}_{DP}(r) \equiv \frac{2N_R}{N_D - 1} \frac{DD(r)}{DR(r)} \quad (8.11)$$

(Davis 与 Peebles [37])。再看前例： $RR(r)$ 只衡量平均位置周围半径为 r 的壳体积，而 $DR(r)$ 衡量平均星系周围相应壳的体积。当星系靠近巡天边缘时，落在巡天外的壳部分不计入，这些体积就较小。因此， $\hat{\xi}_{DP}(r)$ 对两样本给出的结果更接近。

$DD(r)$ 、 $DR(r)$ 与 $RR(r)$ 的其他组合也可用作 ξ 的估计量。Hamilton [38] 提出

$$1 + \hat{\xi}_3(r) = 1 + \hat{\xi}_H(r) \equiv \frac{4N_D N_R}{(N_D - 1)(N_R - 1)} \frac{DD(r)RR(r)}{DR(r)^2}. \quad (8.12)$$

Landy 与 Szalay [39] 提出

$$\hat{\xi}_4(r) = \hat{\xi}_{LS}(r) \equiv \frac{N_R(N_R - 1)}{N_D(N_D - 1)} \frac{DD(r)}{RR(r)} - \frac{N_R - 1}{N_D} \frac{DR(r)}{RR(r)} + 1. \quad (8.13)$$

省去不同总对数带来的归一化因子后，这四个估计量通常象征性地记作⁴⁶

$$\frac{DD}{RR}, \quad \frac{DD}{DR}, \quad \frac{DD \cdot RR}{DR^2}, \quad \frac{DD - 2DR + RR}{RR}, \quad (8.14)$$

但注意，前三个估计 $1 + \xi$ ，最后一个仅估计 ξ 。下面沿用 Landy 与 Szalay [39]，在相关较弱且 $N_R \gg N_D$ 的极限下估计其偏差和方差。虽然他们讨论“角相关函数”，推导并不依赖空间的维数或几何。当然，三维相关还涉及红移畸变和选择函数等额外问题，本节不考虑。

⁴⁶最后一个可象征性地写为 $(D - R)^2/RR$ ，提示了另一种实现方法：由 D 和 R 星表构造含有所有数据点和随机点的“ $D - R$ ”星表，但赋予随机点负权重。再统计 $(D - R)(D - R)$ 对，其中 DR 对作负贡献。

8.1 不同估计量的偏差与方差

本节沿用 Landy 与 Szalay [39], 估计四种 ξ 估计量的偏差和方差。方差估计仅适用于弱相关极限, 其平方根给出统计误差估计。偏差是估计量带来的系统误差, 但若估计偏差, 就可尝试校正。定义 α, β, γ 表示 $DD(r), DR(r), RR(r)$ 计数相对于期望值的相对偏离:

$$\begin{aligned} DD(r) &\equiv \langle DD(r) \rangle [1 + \alpha(r)], \\ DR(r) &\equiv \langle DR(r) \rangle [1 + \beta(r)], \\ RR(r) &\equiv \langle RR(r) \rangle [1 + \gamma(r)]. \end{aligned} \quad (8.15)$$

下文通常省略对 r 的依赖记号。按定义,

$$\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle = \langle \gamma \rangle = 0. \quad (8.16)$$

一个 r 分箱内的对越多, 相对于期望值的典型偏离越小。因此假设 α, β 很小, 只计算至二阶。还假设 N_R 足够大, 可近似取 $\gamma \approx 0$ 。我保留 γ 的记号, 以备以后研究 N_R 的影响。

例如, 对估计量 (8.11), 得到期望值和方差 (练习)

$$\begin{aligned} \langle 1 + \hat{\xi}_{DP}(r) \rangle &= \frac{2N_R}{N_D - 1} \frac{\langle DD \rangle}{\langle DR \rangle} \left\langle \frac{1 + \alpha}{1 + \beta} \right\rangle \\ &\approx \frac{2N_R}{N_D - 1} \frac{\langle DD \rangle}{\langle DR \rangle} (1 - \langle \alpha\beta \rangle + \langle \beta^2 \rangle), \\ \text{var}[\hat{\xi}_{DP}(r)] &\equiv \langle (\hat{\xi}_{DP} - \langle \hat{\xi}_{DP} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{\xi}_{DP}^2 \rangle - \langle \hat{\xi}_{DP} \rangle^2 \\ &\approx \left(\frac{2N_R}{N_D - 1} \frac{\langle DD \rangle}{\langle DR \rangle} \right)^2 (\langle \alpha^2 \rangle - 2\langle \alpha\beta \rangle + \langle \beta^2 \rangle). \end{aligned} \quad (8.17)$$

其中 $\langle \alpha^2 \rangle$ 、 $\langle \alpha\beta \rangle$ 和 $\langle \beta^2 \rangle$ 可由

$$\begin{aligned} \langle DD \cdot DD \rangle &= \langle DD \rangle^2 (1 + \langle \alpha^2 \rangle) &\Rightarrow \langle \alpha^2 \rangle &= \frac{\langle DD \cdot DD \rangle - \langle DD \rangle^2}{\langle DD \rangle^2}, \\ \langle DR \cdot DR \rangle &= \langle DR \rangle^2 (1 + \langle \beta^2 \rangle) &\Rightarrow \langle \beta^2 \rangle &= \frac{\langle DR \cdot DR \rangle - \langle DR \rangle^2}{\langle DR \rangle^2}, \\ \langle DD \cdot DR \rangle &= \langle DD \rangle \langle DR \rangle (1 + \langle \alpha\beta \rangle) &\Rightarrow \langle \alpha\beta \rangle &= \frac{\langle DD \cdot DR \rangle - \langle DD \rangle \langle DR \rangle}{\langle DD \rangle \langle DR \rangle} \end{aligned} \quad (8.18)$$

得到。因此需要期望值 $\langle DD \rangle$ 、 $\langle DR \rangle$ 、 $\langle RR \rangle$ 、 $\langle DD \cdot DD \rangle$ 、 $\langle DR \cdot DR \rangle$ 、 $\langle DD \cdot DR \rangle$; 其他估计量中也会出现 $\langle RR \rangle$ 。

考虑巡天体积 V 中的 N_D 个数据点和 N_R 个随机点。本小节的期望值 $\langle \cdot \rangle$ 指固定 N_D 时的条件期望。把体积分成 K 个微胞, 使微胞 i 中的星系数 n_i 为 0 或 1, 其期望值为 $\langle n_i \rangle = N_D/K$ 。

间隔为 r 的数据对计数为

$$DD(r) = \sum_{i < j}^K n_i n_j \Theta_{ij}(r), \quad (8.19)$$

求和遍历所有微胞对, 而

$$\Theta_{ij}(r) \equiv \begin{cases} 1, & |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i| \in r \pm \frac{1}{2}\Delta r, \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases} \quad (8.20)$$

只选出间隔正确的对。因此 $\sum \Theta_{ij}(r)$ 是间隔为 r 的微胞对数, 且恰好在两个微胞都含有数据点、即星系时, $n_i n_j = 1$ 。所以期望值为

$$\langle DD(r) \rangle = \sum_{i < j}^K \langle n_i n_j \rangle \Theta_{ij}(r). \quad (8.21)$$

若没有相关，则简单地有

$$\langle n_i n_j \rangle = \frac{N_D}{K} \frac{N_D - 1}{K - 1}, \quad (8.22)$$

得到

$$\langle DD(r) \rangle = \frac{N_D(N_D - 1)}{2} G_p(r), \quad (8.23)$$

其中

$$G_p(r) \equiv \frac{2}{K(K - 1)} \sum_{i < j}^K \Theta_{ij}(r) \quad (8.24)$$

是间隔为 r 的微胞对所占比例。当微胞足够小、即 K 足够大时，它与 K 无关。按定义， $G_p(r)$ 满足归一化

$$\sum_r G_p(r) = 1, \quad (8.25)$$

其中对覆盖巡天体积内所有可能间隔的 r 分箱求和。

存在相关时，期望值 $\langle n_i n_j \rangle$ 由相关函数 $\xi(r)$ 修正。必须注意：这里 $\xi(r)$ 是相对于未知 $\langle \rho \rangle$ 定义的真实、未知相关函数，而我们考虑的是固定 $N_D \neq \langle N_D \rangle$ 时受约束的期望值 $\langle DD \rangle$ 。因此需要归一化因子 C_V 作校正，有

$$\langle n_i n_j \rangle = \frac{N_D}{K} \frac{N_D - 1}{K - 1} [1 + \tilde{\xi}(r)] = \frac{N_D}{K} \frac{N_D - 1}{K - 1} C_V [1 + \xi(r)], \quad (8.26)$$

$\tilde{\xi}(r)$ 是按巡天密度归一化的相关函数，于是

$$\langle DD(r) \rangle = \frac{N_D(N_D - 1)}{2} G_p(r) C_V [1 + \xi(r)]. \quad (8.27)$$

利用总对数，可将归一化因子与 $\xi(r)$ 联系起来：

$$\frac{N_D(N_D - 1)}{2} = \sum_r \langle DD(r) \rangle = \frac{N_D(N_D - 1)}{2} C_V \sum_r G_p(r) [1 + \xi(r)], \quad (8.28)$$

所以

$$C_V = \frac{1}{\sum_r G_p(r) [1 + \xi(r)]} \equiv \frac{1}{1 + \xi_V}, \quad (8.29)$$

其中

$$\xi_V \equiv \sum_r G_p(r) \xi(r) \quad (8.30)$$

是巡天对空间 $\{\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}\}$ 体积内的平均期望相关。它为正，因为有限体积遗漏了部分大 r 处的负相关；体积越大，其值越小。因此最终结果为

$$\langle DD(r) \rangle = \frac{N_D(N_D - 1)}{2} G_p(r) \frac{1 + \xi(r)}{1 + \xi_V}. \quad (8.31)$$

注意， $\tilde{\xi}$ 的平均值为 $\tilde{\xi}_V = 0$ ，即“积分约束”。

8.1.1 $\langle DD \cdot DD \rangle$ 、 $\langle DR \cdot DR \rangle$ 与 $\langle DD \cdot DR \rangle$ 的推导

$DD(r)$ 平方的期望为

$$\langle DD \cdot DD \rangle = \sum_{i < j}^K \sum_{k < l}^K \langle n_i n_j n_k n_l \rangle \Theta_{ij}(r) \Theta_{kl}(r), \quad (8.32)$$

其中 i, j 和 k, l 都遍历全部对。根据相等指标的个数， $\langle n_i n_j n_k n_l \rangle$ 分为三种情形；每一项都满足 $i \neq j, k \neq l$ 。

四元组。 第一种情形中, i, j, k, l 各不相同, 将这一部分求和记为 $\sum_{ijkl}^*$ 。共有 $\frac{1}{2}K(K-1) \times \frac{1}{2}(K-2)(K-3)$ 项, 并且

$$\begin{aligned}
\langle n_i n_j n_k n_l \rangle &= \frac{N_D}{K} \frac{N_D-1}{K-1} \frac{N_D-2}{K-2} \frac{N_D-3}{K-3} \langle (1+\delta_i)(1+\delta_j)(1+\delta_k)(1+\delta_l) \rangle \\
&= \frac{N_D}{K} \frac{N_D-1}{K-1} \frac{N_D-2}{K-2} \frac{N_D-3}{K-3} [1 + \langle \delta_i \delta_j \rangle + \langle \delta_k \delta_l \rangle + \langle \delta_i \delta_k \rangle + \langle \delta_i \delta_l \rangle \\
&\quad + \langle \delta_j \delta_k \rangle + \langle \delta_j \delta_l \rangle + \langle \delta_i \delta_j \delta_k \rangle + \langle \delta_i \delta_j \delta_l \rangle + \langle \delta_i \delta_k \delta_l \rangle + \langle \delta_j \delta_k \delta_l \rangle + \langle \delta_i \delta_j \delta_k \delta_l \rangle] \\
&= \frac{N_D}{K} \frac{N_D-1}{K-1} \frac{N_D-2}{K-2} \frac{N_D-3}{K-3} [1 + \tilde{\xi}(r_{ij}) + \tilde{\xi}(r_{ik}) + \tilde{\xi}(r_{il}) + \tilde{\xi}(r_{jk}) + \tilde{\xi}(r_{jl}) + \tilde{\xi}(r_{kl}) \\
&\quad + \tilde{\zeta}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k) + \tilde{\zeta}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) + \tilde{\zeta}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_l) + \tilde{\zeta}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) \\
&\quad + \tilde{\xi}(r_{ij})\tilde{\xi}(r_{kl}) + \tilde{\xi}(r_{ik})\tilde{\xi}(r_{jl}) + \tilde{\xi}(r_{il})\tilde{\xi}(r_{jk}) + \tilde{\eta}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l)].
\end{aligned} \tag{8.33}$$

这里 $\delta_i \equiv \delta(\mathbf{x}_i)$ 是相对于巡天平均星系数密度、而非未知的系综平均密度的扰动,

$$1 + \tilde{\xi}(r) \equiv \frac{1 + \xi(r)}{1 + \xi_V} \tag{8.34}$$

表示“重新归一化”的相关函数, $\tilde{\zeta}$ 是三点相关, 最后一行是四点相关, 其中 $\tilde{\eta}$ 是约化四点相关。三点与四点相关将在第 11 节讨论。对于高斯扰动, $\tilde{\xi}$ 和 $\tilde{\eta}$ 为零。现在采用小 ξ 和高斯近似: 两者相关, 因为高斯近似要求 ξ 很小; 另一方面, 如果原初扰动是高斯的——这是自然且受宇宙学数据支持的假设——那么扰动仍小时就会保持高斯。因此, 式 (8.33) 最后一种形式中, 只保留原式的第一行。

满足 $r_{ij} \in r \pm \Delta r/2$ 和 $r_{kl} \in r \pm \Delta r/2$ 的微胞四元组, 即对的对, 所占比例是 $G_p(r)^2$ 。在大 K 极限下,⁴⁷ 其他指标四元组的数目相对于四个指标各不相同的情形可忽略, 因此

$$\sum_{ijkl}^* \Theta_{ij}(r) \Theta_{kl}(r) = \frac{K(K-1)(K-2)(K-3)}{4} G_p(r)^2. \tag{8.35}$$

式 (8.35) 中的 Θ 约束使

$$\tilde{\xi}(r_{ij}) = \tilde{\xi}(r_{kl}) = \tilde{\xi}(r), \tag{8.36}$$

而其他四项遍历不同 r 值, 以巡天平均 $\tilde{\xi}_V = 0$ 近似。于是

$$\begin{aligned}
\langle n_i n_j n_k n_l \rangle &\approx \frac{N_D(N_D-1)(N_D-2)(N_D-3)}{K(K-1)(K-2)(K-3)} [1 + 2\tilde{\xi}(r)] \\
&= \frac{N_D(N_D-1)(N_D-2)(N_D-3)}{K(K-1)(K-2)(K-3)} \frac{1 + 2\xi(r) - \xi_V}{1 + \xi_V}.
\end{aligned} \tag{8.37}$$

三元组。 第二种情形中指标有三个不同的值, 即 k 或 l 等于 i 或 j , 形成微胞三元组: 两对共享一个点, 见图 28。求和中有多少这样的项? 三个值各不相同的指标三元组共 $K(K-1)(K-2)/6$ 个, 但同一三元组多次出现在求和中。设三个值为 1、2、3, 满足 $i < j, k < l$ 的 (i, j, k, l) 有六种赋值: $(1, 2, 1, 3)$ 、 $(1, 2, 2, 3)$ 、 $(1, 3, 1, 2)$ 、 $(1, 3, 2, 3)$ 、 $(2, 3, 1, 2)$ 、 $(2, 3, 1, 3)$ 。因此共有 $K(K-1)(K-2)$ 项, 因为 $6 \times 1/6 = 1$ 。将这一部分求和记为 $\sum_{ijk}^*$, i 为共享微胞。

式 (8.32) 的三元组部分变为

$$\sum_{ijk}^* \langle n_i n_j n_k \rangle \Theta_{ij}(r) \Theta_{ik}(r). \tag{8.38}$$

⁴⁷ 微胞方法本质上是 $K \rightarrow \infty$ 极限, 因此可将 $K(K-1)(K-2)(K-3)$ 写成 K^4 , 其他类似。

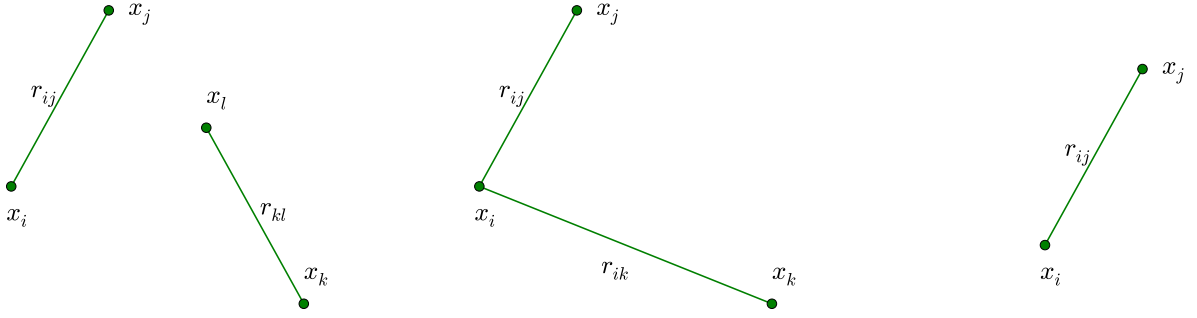


图 28: 微胞的四元组 (两对)、三元组和一对。

$\Theta_{ij}(r)\Theta_{ik}(r)$ 选出其他两点与共享点间隔都为 r 的项。令 $G_t(r)$ 表示满足条件的比例, 故

$$\sum_{ijk}^* \Theta_{ij}(r)\Theta_{ik}(r) = K(K-1)(K-2)G_t(r). \quad (8.39)$$

多数三元组的两臂不等长, 因此 $\sum G_t(r) \ll 1$ 。显然 $G_t(r)$ 与 $G_p(r)^2$ 同量级, 因为现在需要满足两个条件; 但后面会看到 $G_t > G_p^2$ 。二者的差别随后将变得重要。式 (8.39) 的 Θ 约束要求 $r_{ij} = r_{ik} = r$, 由于微胞 j, k 通过两个长为 r 的步长连接, r_{jk} 必须在 0 与 $2r$ 之间。也将 $\xi(r_{jk})$ 近似为 $\xi(r)$, 于是

$$\begin{aligned} \langle n_i n_j n_k \rangle &\approx \frac{N_D(N_D-1)(N_D-2)}{K(K-1)(K-2)} [1 + 3\tilde{\xi}(r) + \tilde{\zeta}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)] \\ &\approx \frac{N_D(N_D-1)(N_D-2)}{K(K-1)(K-2)} \frac{1 + 3\xi(r) - 2\xi_V}{1 + \xi_V}. \end{aligned} \quad (8.40)$$

点对。 第三种情形是 $i = k, j = l$, 即两对相同, 因此这一部分只是对点对的一重求和:

$$\sum_{i < j} \langle n_i n_j \rangle \Theta_{ij}(r)\Theta_{ij}(r) = \frac{N_D(N_D-1)}{2} G_p(r) [1 + \tilde{\xi}(r)]. \quad (8.41)$$

这来自式 (8.19) 和 (8.31), 因为 $\Theta_{ij}(r)\Theta_{ij}(r) = \Theta_{ij}(r)$ 。

合在一起, 有

$$\begin{aligned} \langle DD \cdot DD \rangle &\approx \frac{N_D(N_D-1)(N_D-2)(N_D-3)}{4} G_p(r)^2 \frac{1 + 2\xi(r)}{1 + 2\xi_V} \\ &\quad + N_D(N_D-1)(N_D-2) G_t(r) \frac{1 + 3\xi(r)}{1 + 3\xi_V} \\ &\quad + \frac{N_D(N_D-1)}{2} G_p(r) \frac{1 + \xi(r)}{1 + \xi_V}. \end{aligned} \quad (8.42)$$

由于 ξ_V 很小, $1/(1 + \xi_V) \approx 1 - \xi_V$, 因此我将 ξ_V 在分子、分母之间作了移动。

从而有 (练习)

$$\langle \alpha^2 \rangle \approx \frac{2}{N_D(N_D-1)} \left\{ 2(N_D-2) \left[\frac{G_t(r)}{G_p(r)^2} \frac{1 + \xi(r)}{1 + \xi_V} - 1 \right] + \frac{1}{G_p(r)} \frac{1 + \xi_V}{1 + \xi(r)} - 1 \right\}. \quad (8.43)$$

$\langle DR \rangle$ 、 $\langle DR \cdot DR \rangle$ 、 $\langle DD \cdot DR \rangle$ 的计算类似，只须注意数据点与随机点互不相关。得到

$$\begin{aligned}
\langle DR \rangle &= N_D N_R G_p(r), \\
\langle DR \cdot DR \rangle &= N_D N_R (N_D - 1)(N_R - 1) G_p(r)^2 + N_D N_R (N_R - 1) G_t(r) \\
&\quad + N_D N_R (N_D - 1) \frac{1 + \xi(r)}{1 + \xi_V} G_t(r) + N_D N_R G_p(r), \\
\langle DD \cdot DR \rangle &= \frac{1}{2} N_D (N_D - 1)(N_D - 2) N_R G_p(r)^2 \frac{1 + \xi(r)}{1 + \xi_V} \\
&\quad + N_R N_D (N_D - 1) G_t(r) \frac{1 + \xi(r)}{1 + \xi_V}.
\end{aligned} \tag{8.44}$$

对于随机星表，只需令 $\xi = 0$ ，便可沿用 $\langle DD \rangle$ 和 $\langle DD \cdot DD \rangle$ 的推导，得到 $\langle RR \rangle$ 和 $\langle RR \cdot RR \rangle$ 。不过，由于近似取了 $\gamma = 0$ ，简单地有

$$RR = \langle RR \rangle = \frac{N_R(N_R - 1)}{2} G_p(r), \tag{8.45}$$

因此可从 $RR(r)$ 得到 $G_p(r)$ 。要得到 $G_t(r)$ ，需另写程序，从随机星表中寻找满足 r 条件的所有三元组，见图 29。

$\langle DR \cdot DR \rangle$ 和 $\langle DD \cdot DR \rangle$ 的计算。 考虑包含数据-随机对的 $\langle DR \rangle$ 和 $\langle DR \cdot DR \rangle$ 。需要决定是否允许数据点和随机点共享同一微胞。这里不允许，即假设微胞足够小、 K 足够大。这意味着 K 远大于 N_D 或 N_R ， K 与 $K - 1$ 等实际上没有差别，因此都写成 K 。Landy 与 Szalay [39] 似乎在这里采用 $N_R \rightarrow \infty$ 近似，但我不愿这样做，所以仍保留例如 N_R 与 $N_R - 1$ 的区别。对 $\langle DR \rangle$ ，得到

$$\langle DR \rangle = \sum_{i \neq j}^K \langle n_i r_j \rangle \Theta_{ij}(r) = \frac{N_D N_R}{K^2} \sum_{i \neq j}^K \Theta_{ij}(r) = N_D N_R G_p(r), \tag{8.46}$$

$r_j = 0$ 或 1 是微胞 j 中的随机点数。每对微胞在求和中出现两次，因为要检查两种可能：第一微胞包含数据点而第二微胞包含随机点，或反之。

对 $\langle DR \cdot DR \rangle$ ，沿用将求和分为三部分的 $\langle DD \cdot DD \rangle$ 计算。现在微胞三元组出现 24 次而非 6 次：6 种情形中共享微胞 i 含数据点，6 种含随机点，另外 12 种则要求同时包含两者；我们将后一情形的概率设为零，因此这些项消失。得到

$$\begin{aligned}
\langle DR \cdot DR \rangle &= N_D N_R (N_D - 1)(N_R - 1) G_p(r)^2 + N_D N_R (N_R - 1) G_t(r) \\
&\quad + N_D N_R (N_D - 1) \frac{1 + \xi(r)}{1 + \xi_V} G_t(r) + N_D N_R G_p(r).
\end{aligned} \tag{8.47}$$

在 N_R 很大且相关可忽略的极限下，它变为式 (8.50) 第二行；当 $N_R \gg G_p/G_t$ 时可舍去最后一项。

$\langle DD \cdot DR \rangle$ 中又会出现三点相关，但间隔条件不同。得到

$$\begin{aligned}
\langle DD \cdot DR \rangle &= \frac{1}{2} N_D (N_D - 1)(N_D - 2) N_R G_p(r)^2 \frac{1 + \xi(r)}{1 + \xi_V} \\
&\quad + N_R N_D (N_D - 1) G_t(r) \frac{1 + \xi(r)}{1 + \xi_V}.
\end{aligned} \tag{8.48}$$

8.1.2 弱相关极限

式 (8.42) 和 (8.44) 中，相关函数 ξ 只以 $1 + n\xi$ 的形式出现。既然已基于 ξ 很小作了近似，计算方差时可将这些因子近似为 1，因为方差所需精度不如偏差高；计算偏差所需的 $\langle DD \rangle$ 中不作这

一近似。采用此近似，并取 $N_R \rightarrow \infty$ 极限，两式变为

$$\begin{aligned}
\langle DD \cdot DD \rangle &= \frac{N_D(N_D - 1)(N_D - 2)(N_D - 3)}{4} G_p(r)^2 \\
&\quad + N_D(N_D - 1)(N_D - 2) G_t(r) + \frac{N_D(N_D - 1)}{2} G_p(r), \\
\langle DR \rangle &= N_D N_R G_p(r), \\
\langle DR \cdot DR \rangle &= N_D N_R^2 [G_p(r)^2 (N_D - 1) + G_t(r)], \\
\langle DD \cdot DR \rangle &= \frac{1}{2} N_D(N_D - 1) N_R [(N_D - 2) G_p(r)^2 + 2 G_t(r)].
\end{aligned} \tag{8.49}$$

于是

$$\begin{aligned}
\langle \alpha^2 \rangle &= \frac{2}{N_D(N_D - 1)} \left\{ 2(N_D - 2) \left[\frac{G_t(r)}{G_p(r)^2} - 1 \right] + \frac{1}{G_p(r)} - 1 \right\}, \\
\langle \beta^2 \rangle &= \frac{1}{N_D} \left[\frac{G_t(r)}{G_p(r)^2} - 1 \right] \equiv t, \\
\langle \alpha\beta \rangle &= \frac{2}{N_D} \left[\frac{G_t(r)}{G_p(r)^2} - 1 \right] = 2\langle \beta^2 \rangle = 2t.
\end{aligned} \tag{8.50}$$

这里 t 是由 G_t 与 G_p^2 的差别引起的小量。因为它等于 $\langle \beta^2 \rangle$ ，必须为正，所以 $G_t > G_p^2$ 。这一差别源于边缘效应。

8.1.3 偏差

定义归一化对计数

$$\begin{aligned}
d(r) &\equiv \frac{DD(r)}{\frac{1}{2} N_D(N_D - 1) G_p(r)} \Rightarrow \langle d \rangle = \frac{1 + \xi(r)}{1 + \xi_V}, \\
x(r) &\equiv \frac{DR(r)}{N_D N_R G_p(r)} \Rightarrow \langle x \rangle = 1,
\end{aligned} \tag{8.51}$$

从而可将四个估计量写为

$$\begin{aligned}
1 + \hat{\xi}_1(r) &\equiv d(r), \\
1 + \hat{\xi}_{DP}(r) &\equiv d(r)/x(r), \\
1 + \hat{\xi}_H(r) &\equiv d(r)/x(r)^2, \\
1 + \hat{\xi}_{LS}(r) &\equiv d(r) - 2x(r) + 2.
\end{aligned} \tag{8.52}$$

立即可见，除“积分约束”因子 $1 + \xi_V$ 外，第一和最后一个估计量无偏：

$$1 + \langle \hat{\xi}_1 \rangle = 1 + \langle \hat{\xi}_{LS} \rangle = \langle d \rangle = \frac{1 + \xi(r)}{1 + \xi_V}. \tag{8.53}$$

第二、第三个估计量中的比值产生偏差。在 $\xi \rightarrow 0$ 极限，式 (8.17) 第一行成为

$$1 + \langle \hat{\xi}_{DP} \rangle = \langle d(r)/x(r) \rangle = \langle d \rangle (1 - \langle \alpha\beta \rangle + \langle \beta^2 \rangle) = \langle d \rangle (1 - t), \tag{8.54}$$

类似计算给出（练习）

$$1 + \langle \hat{\xi}_H \rangle = \langle d(r)/x(r)^2 \rangle = \langle d \rangle (1 - 2\langle \alpha\beta \rangle + 3\langle \beta^2 \rangle) = \langle d \rangle (1 - t). \tag{8.55}$$

8.1.4 弱相关极限下的方差

在弱相关极限中，

$$\begin{aligned}
\langle \alpha^2 \rangle &\approx \frac{2}{N_D(N_D - 1)} \left\{ 2(N_D - 2) \left[\frac{G_t(r)}{G_p(r)^2} - 1 \right] + \frac{1}{G_p(r)} - 1 \right\} \\
&= 4t + p,
\end{aligned} \tag{8.56}$$

其中

$$p \equiv \frac{2}{N_D(N_D - 1)} \left[\frac{1}{G_p} - 2 \frac{G_t}{G_p^2} + 1 \right] \approx \frac{2}{N_D(N_D - 1)G_p(r)}. \quad (8.57)$$

方括号内其他项为 1 量级，而 $1/G_p$ 很大。 p 的近似形式是无相关情况下分箱内预期对数的倒数，即泊松分布的相对方差。

现在计算四个估计量的方差

$$\text{var}(\hat{\xi}) \equiv \langle (\hat{\xi} - \langle \hat{\xi} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{\xi}^2 \rangle - \langle \hat{\xi} \rangle^2. \quad (8.58)$$

利用上面的结果

$$d = \langle d \rangle (1 + \alpha), \quad x = \langle x \rangle (1 + \beta), \quad \langle \alpha^2 \rangle = 4t + p, \quad \langle \beta^2 \rangle = t, \quad \langle \alpha\beta \rangle = 2t. \quad (8.59)$$

对于第一个估计量，

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1 &= d - 1 = \langle d \rangle (1 + \alpha) - 1 \Rightarrow \hat{\xi}_1^2 = \langle d \rangle^2 (1 + \alpha)^2 - 2\langle d \rangle (1 + \alpha) + 1, \\ \langle \hat{\xi}_1^2 \rangle &= \langle d \rangle^2 (1 + \langle \alpha^2 \rangle) - 2\langle d \rangle + 1, \\ \langle \hat{\xi}_1 \rangle^2 &= \langle d \rangle^2 - 2\langle d \rangle + 1, \\ \text{var}(\hat{\xi}_1) &= \langle d \rangle^2 \langle \alpha^2 \rangle \approx \langle d \rangle^2 (4t + p). \end{aligned} \quad (8.60)$$

对于 Davis-Peebles 估计量，

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{\text{DP}} &= \frac{d}{x} - 1 = \langle d \rangle \frac{1 + \alpha}{1 + \beta} - 1 \approx \langle d \rangle (1 + \alpha - \beta - \beta\alpha + \beta^2) - 1, \\ \langle \hat{\xi}_{\text{DP}} \rangle &\approx \langle d \rangle (1 - \langle \beta\alpha \rangle + \langle \beta^2 \rangle) - 1 = \langle d \rangle (1 - t) - 1, \\ \hat{\xi}_{\text{DP}}^2 &= \left(\frac{d}{x} \right)^2 - 2 \frac{d}{x} + 1 = \langle d \rangle^2 \frac{(1 + \alpha)^2}{(1 + \beta)^2} - 2\langle d \rangle \frac{1 + \alpha}{1 + \beta} + 1, \\ \langle \hat{\xi}_{\text{DP}}^2 \rangle &= \langle d \rangle^2 \left\langle \frac{(1 + \alpha)^2}{(1 + \beta)^2} \right\rangle - 2\langle d \rangle \left\langle \frac{1 + \alpha}{1 + \beta} \right\rangle + 1 \\ &\approx \langle d \rangle^2 (1 - t + p) - 2\langle d \rangle (1 - t) + 1, \\ \langle \hat{\xi}_{\text{DP}} \rangle^2 &\approx \langle d \rangle^2 (1 - 2t) - 2\langle d \rangle (1 - t) + 1, \\ \text{var}(\hat{\xi}_{\text{DP}}) &\approx \langle d \rangle^2 (t + p). \end{aligned} \quad (8.61)$$

类似地得到 (练习)

$$\text{var}(\hat{\xi}_{\text{H}}) \approx \text{var}(\hat{\xi}_{\text{LS}}) \approx \langle d \rangle^2 p, \quad (8.62)$$

说明后两者方差更小。我得到 $\text{var}(\hat{\xi}_{\text{LS}}) \approx \langle d \rangle^2 p + 4t(\langle d \rangle - 1)^2$ ，但由于假设弱相关， $(\langle d \rangle - 1)^2$ 很小，可舍去 $t(\langle d \rangle - 1)^2$ 。又因 $\hat{\xi}_{\text{LS}}$ 除积分约束外无偏，通常优先采用它。

注意， $\hat{\xi}_1$ 和 $\hat{\xi}_{\text{LS}}$ 无偏的结果是在 $N_R \rightarrow \infty$ 极限下得到的。有限随机星表会引入偏差，但星表足够大时偏差很小。

还须注意，这些方差结果是在小 $\xi(r)$ 极限下得到的。 $\xi(r)$ 很大时，不容易估计这些估计量的方差。可使用基于数据本身重采样的自助法 (bootstrap) 和刀切法 (jackknife)，这里不作讨论。事实上，小间隔处较大的 $\xi(r)$ 甚至会影响较大间隔、 $\xi(r)$ 较小时的方差，例如破坏式 (8.40) 前的近似 $\xi(r_{jk}) \approx \xi(r)$ 。因此上述估计量方差比较仅供参考，真实方差更大。用测得的相关函数估计宇宙学参数，需要知道相关函数估计的方差。即使上述数据重采样方法也不可靠；严谨研究会生成大量模拟数据实现，对每个实现计算相关函数，再在整组实现间计算方差。对大型星系巡天，这是很大的计算工作量。

注意，Landy-Szalay 估计量在 $N_R \rightarrow \infty$ 极限下无偏的结果，也对较大的 $\xi(r)$ 成立。因此，以无偏性作为优先选用它的理由，比以小方差为理由更有根据。

练习：点对体积比例。 在 $d = 1, 2, 3$ 维中，对立方体体积 $V = L^d$ ，忽略边缘效应，并将 Δr 视为 dr ，求 $G_p(r)$ 。前者适用于 $r \ll L$ ，后者适用于 $\Delta r \ll r$ 。三种情形的最大可能间隔 $r_{\max}$ 分别是多少？用这些近似公式计算 $\sum_r G_p(r)$ 得到什么？求和在多大的 r 处就已达 1？

练习：三元组体积比例。 $G_t(r)$ 与 $G_p(r)^2$ 的差别来自边缘效应。现在正确计入这些效应，仍可将 Δr 视为 dr ，求一维情形中巡天体积为 L 时的 $G_p(r)$ 和 $G_t(r)$ 。证明 $G_t(r) > G_p(r)^2$ 。是否有特殊的 r 值使二者相等？

课题。 对于大型巡天，使 $N_R \gg N_D$ 可能计算代价很高。例如 Euclid 有 $N_D \sim 10^9$ ；若按通常建议取 $N_R \sim 10^2 N_D$ ，就有约 10^{22} 个随机对。为研究使用较小 N_R 的影响，在不假设 $\gamma \approx 0$ 的情况下重做本节推导。文献 [40] 已完成这一工作。

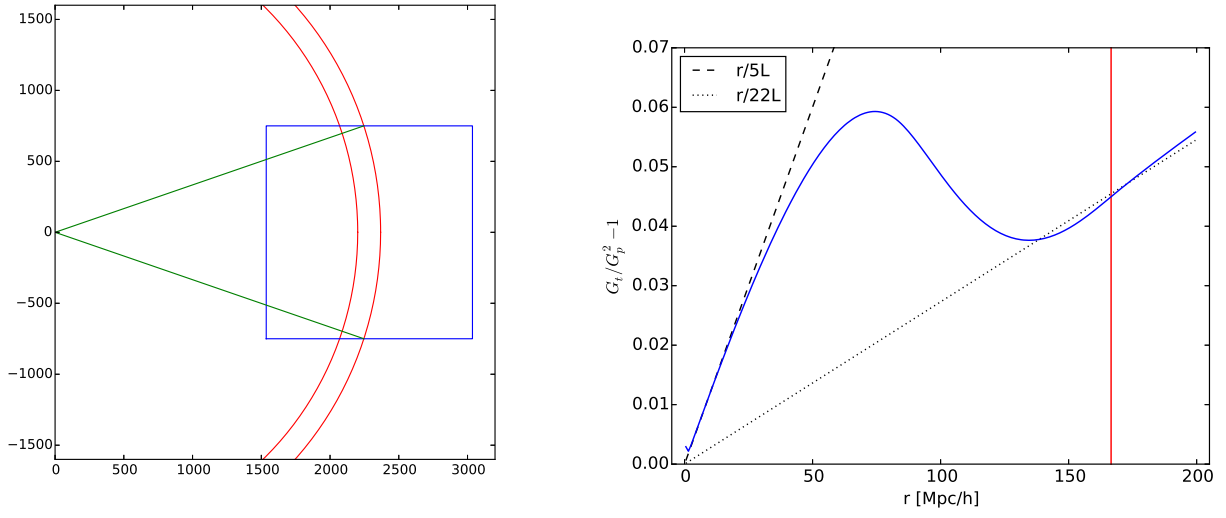


图 29: 左: 对应一个红移分箱的简单巡天几何, 为便于模拟而选择。坐标轴单位为 $h^{-1}\text{Mpc}$, 观测者在左侧 $(0,0,0)$ 。两条红线表示 $\Omega_m = 0.32$ 的 ΛCDM 模型中, 宇宙学红移 $z = 0.95$ 和 $z = 1.05$ 对应的共动距离。巡天体积是两红移之间的壳与蓝色所示 $(1500 h^{-1}\text{Mpc})^3$ 盒子的交集, 但排除视线在到达外壳前就离开盒子的点, 绿色示意了这一排除。壳厚为 $166.6 h^{-1}\text{Mpc}$, 略窄, 使大 r 处径向统计量不足, 超过 $r = 166.6 h^{-1}\text{Mpc}$ 后完全没有; 因此较大的 Δz 更好。右: 这一几何中 G_t 与 G_p^2 的差别, 通过在巡天体积内按泊松过程投放随机点并统计点对和三元组计算。竖直红线表示壳厚。虚线和点线是对小 r 和大 r 行为的简单手动拟合。

9 功率谱估计

在大尺度上, 相比 $\xi(\mathbf{x})$, 直接估计 $P(k)$ 有若干优点。真实 $\langle \rho \rangle$ 的不确定性, 对 $P(k)$ 只造成乘性因子, 而当 ξ 小于差值 $(\bar{\rho}^2 - \langle \rho \rangle^2)/\langle \rho \rangle^2$ 时, 甚至可能使我们把 ξ 的符号弄错。在扰动仍处于线性区间的大尺度上, 不同傅里叶模 $\delta_{\mathbf{k}}$ 独立演化, 因此低 k 模不受小尺度非线性行为污染;⁴⁸ 而大 r 处的 $\xi(r)$ 混合了线性模与非线性模。

9.1 散粒噪声

第 2 节说明, 对泊松分布有 $P(k) = \text{const} = 1/\langle \rho \rangle$, $r \neq 0$ 时 $\xi(r) = 0$, 但 $\xi(0)$ 非零且随分辨率提高而增大, 即 $\xi(r)$ 为 δ 函数。常数与 δ 函数构成傅里叶变换对。我们将星系看作对底层连续密度场的采样, 希望得到该密度场的 $P(k)$ 和 $\xi(r)$ 。 $P(k)$ 中的常数贡献, 以及 $\xi(r)$ 中相应的 δ 函数尖峰, 是这种离散采样的结果, 称为散粒噪声或泊松噪声, 不属于底层密度场。因此, 不希望将其计入估计的 $P(k)$ 。这与第 8 节估计 $\xi(r)$ 的方法一致: 那里通过与泊松分布比较估计 ξ , 所以泊松分布的预期结果为 $\xi = 0$ 。因此, 现在对泊松分布有 $P(k) = \xi(r) = 0$ 。

第 2.5.1 节曾对泊松分布分析离散天体集合的功率谱, 现在对存在相关的情形重新分析。密度与其扰动的傅里叶系数满足简单关系

$$\delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \rho_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{k} = 0 \text{ 除外}. \quad (9.1)$$

所以

$$P(k) \equiv V \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \frac{V}{\langle \rho \rangle^2} \langle |\rho_{\mathbf{k}}|^2 \rangle, \quad (9.2)$$

同样排除 $k = 0$, 而这里并不求 $P(k = 0)$ 。因此使用概念上更简单的 ρ , 而非 δ 。

再次将参考体积 V 分为体积为 δV 的微胞。微胞 j 的密度为

$$\rho(\mathbf{x}_j) = \frac{n_j}{\delta V}, \quad (9.3)$$

占据数 $n_j = 0$ 或 1 , 其期望为 $\langle n_j \rangle = \langle \rho \rangle \delta V \ll 1$ 。得到 $\rho_{\mathbf{k}}$ 及其期望值:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{V} \int_V \rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^d x = \frac{1}{V} \sum_j \frac{n_j}{\delta V} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \delta V = \frac{1}{V} \sum_j n_j e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j}, \\ \langle \rho_{\mathbf{k}} \rangle &= \frac{1}{V} \sum_j \langle n_j \rangle e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} = \frac{\langle \rho \rangle}{V} \int_V e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^d x = 0 \quad (\mathbf{k} \neq 0). \end{aligned} \quad (9.4)$$

对其相关, 得到

$$\langle \rho_{\mathbf{k}}^* \rho_{\mathbf{k}'} \rangle = \frac{1}{V^2} \sum_{ij} \langle n_i n_j \rangle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}_j}. \quad (9.5)$$

第一个关键步骤, 是从微胞对求和中分离 $i = j$ 的部分。由于微胞数近乎无限, 或许会以为这一贡献可以忽略; 但它恰好对应 ξ 的 δ 函数尖峰, 因此不能忽略。不过, $i = j$ 部分在对空间所占体积可

⁴⁸ 严格说, 只有当所有尺度都处于线性区间时, 傅里叶模才严格独立。非线性小尺度会在多大程度上影响仍处于线性区间的大尺度, 是尚未完全解决的反作用难题; 不过, 有理由预期这些影响很小。

忽略，所以剩余 $i \neq j$ 的求和仍可视为对个体积的二重积分，只是去掉了 ξ 的 δ 尖峰。因此⁴⁹

$$\begin{aligned}
\langle \rho_{\mathbf{k}}^* \rho_{\mathbf{k}'} \rangle &= \frac{1}{V^2} \sum_j \langle n_j \rangle e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_j} + \frac{1}{V^2} \sum_{i \neq j} \langle n_i n_j \rangle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}_j} \\
&= \frac{1}{V^2} \sum_j \langle \rho \rangle \delta V e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_j} \\
&\quad + \frac{1}{V^2} \sum_{i \neq j} \langle \rho \rangle^2 \delta V^2 [1 + \xi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}_j} \\
&= \frac{\langle \rho \rangle}{V^2} \int_V e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} d^d x + \frac{\langle \rho \rangle^2}{V^2} \int_V d^d x e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int_V d^d x' e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'} \\
&\quad + \frac{\langle \rho \rangle^2}{V^2} \int_V d^d x d^d x' \xi(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'} \\
&= \frac{\langle \rho \rangle}{V} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + 0 + \langle \rho \rangle^2 \frac{1}{V} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} P(k).
\end{aligned} \tag{9.6}$$

与式 (1.74) 一样，这里利用统计均匀性从 $\xi(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$ 得到 $P(k)$ 。

结果可写成

$$\tilde{P}(k) \equiv \frac{V}{\langle \rho \rangle^2} \langle |\rho_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \frac{1}{\langle \rho \rangle} + P(k), \tag{9.7}$$

其中 $\tilde{P}(k)$ 是点分布，即星系分布的功率谱， $1/\langle \rho \rangle$ 是散粒噪声，而

$$P(k) = \frac{V}{\langle \rho \rangle^2} \langle |\rho_{\mathbf{k}}|^2 \rangle - \frac{1}{\langle \rho \rangle}, \quad \rho_{\mathbf{k}} = \frac{1}{V} \sum_j n_j e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} \tag{9.8}$$

是我们希望得到的功率谱。

将其变成估计量时，以实际观测的 $n_j = 0$ 或 1 替换期望值 $\langle n_j \rangle$ ，使微胞求和变成星系求和，并以 $\bar{\rho} = N/V$ 代替 $\langle \rho \rangle$ ：

$$\begin{aligned}
\hat{P}(\mathbf{k}) &= V \left(\frac{V^2}{N^2} |\rho_{\mathbf{k}}|^2 - \frac{1}{N} \right), \quad \rho_{\mathbf{k}} = \frac{1}{V} \sum_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i}, \\
&= V \left| \frac{1}{N} \sum_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} \right|^2 - \frac{V}{N}.
\end{aligned} \tag{9.9}$$

本节约定：对 j 的求和遍历微胞，对 i 的单重求和遍历星系，而对 ij 的二重求和遍历微胞。

实际中，将 $\mathbf{k}$ 分箱，对式 (9.9) 得到的 $\hat{P}(\mathbf{k})$ 作平均，得到该分箱的 $\hat{P}(\mathbf{k})$ 或 $\hat{P}(k)$ 。

9.2 掩膜

实际巡天体积通常不是完美立方体。因此令 V 为包含巡天体积 $V_S < V$ 的大立方体，并为傅里叶分析假设 V 内的周期性。引入掩膜计入巡天体积：

$$W(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in V_S, \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases} \Rightarrow \int_V W(\mathbf{x}) d^d x = V_S. \tag{9.10}$$

⁴⁹回头看，这里没有必要包含 $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$ 的情形。取 $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ ，式 (9.6) 变为

$$\langle |\rho_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{V} + 0 + \frac{\langle \rho \rangle^2}{V^2} \int_V d^d x d^d x' \xi(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})},$$

最后一项为 $(\langle \rho \rangle^2 / V) P(k)$ 。如果将

$$P(k) = \frac{1}{V} \int_V d^d x d^d x' \xi(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}$$

作为功率谱定义，甚至无需假设统计均匀性。

也可用掩膜为巡天不同部分赋予不同权重，原因稍后讨论，使

$$0 \leq W(\mathbf{x}) \leq 1. \quad (9.11)$$

较小 W 的区域权重较小。仍可按式 (9.10) 定义 V_S ，这个加权体积会小于实际体积。如下所示，必须要求 W 缓慢变化，使 W 形状的典型波长远大于我们希望估计 $P(k)$ 的傅里叶模 k 的波长。权重也可用来平滑巡天边缘，使 W 不在边缘从 1 突降到 0。

掩膜乘在密度场上， $\rho(\mathbf{x}) \rightarrow \rho^w(\mathbf{x}) \equiv W(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})$ ，这里称为加权密度。这会产生若干影响：破坏统计均匀性；真实密度扰动现在对应 $W(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})$ 相对于自身已不均匀的 $W(\mathbf{x})\langle\rho\rangle$ 的偏离；这样得到的密度扰动是真实密度扰动乘以掩膜，在傅里叶空间中变成卷积。

定义微胞中的加权星系数 $n_j^w \equiv W(\mathbf{x}_j)n_j = W_j n_j$ ，其中 $n_j = 0$ 或 1 是真实星系数，因此 $0 \leq n_j^w \leq 1$ 。有 $n_j^2 = n_j$ ，但对加权掩膜，一般 $(n_j^w)^2 \neq n_j^w$ 。微胞的加权密度为

$$\rho^w(\mathbf{x}_j) \equiv \frac{n_j^w}{\delta V} \equiv \frac{W(\mathbf{x}_j)n_j}{\delta V} = \frac{W_j n_j}{\delta V}. \quad (9.12)$$

加权密度的傅里叶分量满足

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{k}}^w &= \frac{1}{V} \sum_j n_j W_j e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_j}, \\ \langle\rho_{\mathbf{k}}^w\rangle &= \frac{1}{V} \sum_j \langle n_j \rangle W_j e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_j} = \frac{\langle\rho\rangle}{V} \int_V W(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^d x = \langle\rho\rangle W_{\mathbf{k}} \neq 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

现在按式 (9.6) 的方式计算。掩膜破坏了统计均匀性，不同 $\rho_{\mathbf{k}}^w$ 之间会相关。对功率谱只需要 $\langle|\rho_{\mathbf{k}}^w|^2\rangle$ ，所以从一开始就令 $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ ：

$$\begin{aligned} \langle\rho_{\mathbf{k}}^{w*}\rho_{\mathbf{k}}^w\rangle &= \frac{1}{V^2} \sum_j \langle n_j \rangle W_j^2 + \frac{1}{V^2} \sum_{i \neq j} \langle n_i n_j \rangle W_i W_j e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} \\ &= \frac{1}{V^2} \sum_j \langle\rho\rangle W_j^2 \delta V + \frac{1}{V^2} \sum_{i \neq j} \langle\rho\rangle^2 \delta V^2 [1 + \xi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)] W_i W_j e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} \\ &= \frac{\langle\rho\rangle}{V} \frac{1}{V} \int_V W(\mathbf{x})^2 d^d x + \langle\rho\rangle^2 \left| \frac{1}{V} \int_V d^d x W(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right|^2 \\ &\quad + \frac{\langle\rho\rangle^2}{V^2} \int_V d^d x d^d x' W(\mathbf{x}) W(\mathbf{x}') \xi(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \\ &= \frac{\langle\rho\rangle}{V} \sum_{\mathbf{q}} |W_{\mathbf{q}}|^2 + \langle\rho\rangle^2 |W_{\mathbf{k}}|^2 \\ &\quad + \langle\rho\rangle^2 \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}'} P(k') \frac{1}{V} \int_V d^d x W(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \frac{1}{V} \int_V d^d x' W(\mathbf{x}') e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}'}. \end{aligned} \quad (9.14)$$

第一项使用了 Parseval 公式

$$\frac{1}{V} \int_V W(\mathbf{x})^2 d^d x = \sum_{\mathbf{q}} |W_{\mathbf{q}}|^2, \quad (9.15)$$

最后一项使用了⁵⁰

$$\xi(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} P(k'). \quad (9.16)$$

现在有

$$\langle\rho_{\mathbf{k}}^{w*}\rho_{\mathbf{k}}^w\rangle - \langle\rho\rangle^2 |W_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{\langle\rho\rangle}{V} \sum_{\mathbf{q}} |W_{\mathbf{q}}|^2 + \frac{\langle\rho\rangle^2}{V} \sum_{\mathbf{k}'} |W_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}|^2 P(k'). \quad (9.17)$$

⁵⁰这里写 $P(k)$ 而非 $P_{\mathbf{k}}$ ，是因为按我的约定 $P_{\mathbf{k}} = P(k)/V$ ，而希望聚焦于待估计且与参考体积 V 无关的量 $P(k)$ 。

没有掩膜时，式 (9.14) 中现在移到左侧的第二项为零。由式 (9.13) 可知，它就是 $|\langle \rho_{\mathbf{k}}^w \rangle|^2$ 。因此，式 (9.17) 左侧可写作 $\langle |\rho_{\mathbf{k}}^w - \langle \rho_{\mathbf{k}}^w \rangle|^2 \rangle$ ，即比较 $W\rho$ 与 $W\langle \rho \rangle$ 以得到密度扰动。

式 (9.17) 最后一项是功率谱与 $|W_{\mathbf{k}}|^2$ 的卷积。要解出 $P(k)$ ，必须反卷积。这里采用近似方式，假设 $W(\mathbf{x})$ 在希望估计 $P(k)$ 的尺度上平滑，且 $P(k)$ 随 k 变化不快。在 $W(\mathbf{x}) = \text{const}$ 的极端情形，其傅里叶变换为常数乘以 δ 函数，与 δ 函数卷积相当于乘以该常数。⁵¹如果 $W(\mathbf{x})$ 只是平滑， $W(\mathbf{k})$ 就是在 $\mathbf{k} = 0$ 附近的窄峰，即求和

$$\sum_{\mathbf{k}'} |W_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}|^2 P(k') = \sum_{\mathbf{q}} |W_{\mathbf{q}}|^2 P(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \quad (\mathbf{q} \equiv \mathbf{k}' - \mathbf{k}, W_{-\mathbf{q}} = W_{\mathbf{q}}^*) \quad (9.18)$$

中，仅有 $|\mathbf{q}| = |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| \ll |\mathbf{k}|$ 的项重要， k 代表关心的尺度。假设 $P(\mathbf{k} + \mathbf{q})$ 在这一 $\mathbf{q}$ 范围内变化不大，将求和近似为

$$P(k) \sum_{\mathbf{q}} |W_{\mathbf{q}}|^2, \quad (9.19)$$

把卷积变成乘法，因而把反卷积变成除法。

现在可以从式 (9.17) 解出 $P(k)$ ：

$$\begin{aligned} P(k) &\approx \frac{V \langle |\rho_{\mathbf{k}}^w - \langle \rho_{\mathbf{k}}^w \rangle|^2 \rangle - \langle \rho \rangle \sum_{\mathbf{q}} |W_{\mathbf{q}}|^2}{\langle \rho \rangle^2 \sum_{\mathbf{q}} |W_{\mathbf{q}}|^2} \\ &\equiv \frac{V^2 \langle |\rho_{\mathbf{k}}^w - \langle \rho_{\mathbf{k}}^w \rangle|^2 \rangle - N_{\text{eff}}}{\langle \rho \rangle^2 V \sum_{\mathbf{q}} |W_{\mathbf{q}}|^2}, \end{aligned} \quad (9.20)$$

其中

$$N_{\text{eff}} = \langle \rho \rangle V \sum_{\mathbf{q}} |W_{\mathbf{q}}|^2. \quad (9.21)$$

为变成估计量，将式 (9.13) 的 $\rho_{\mathbf{k}}^w$ 及 $\langle \rho \rangle$ 用 n_j 表示，再用观测值替代期望值，将微胞求和换成观测星系求和。有

$$\sum \langle n_j \rangle W_j = \langle \rho \rangle \sum W_j \delta V \Rightarrow \langle \rho \rangle = \frac{\sum \langle n_j \rangle W_j}{\sum W_j \delta V}, \quad (9.22)$$

将其替换为⁵²

$$\bar{\rho} \equiv \frac{\sum n_j W_j}{\sum W_j \delta V} = \frac{\sum W_i}{V_S} \equiv \frac{N_S}{V_S}, \quad (9.23)$$

其中定义

$$N_S \equiv \sum_i W_i, \quad (9.24)$$

并且

$$\rho_{\mathbf{k}}^w - \langle \rho_{\mathbf{k}}^w \rangle \rightarrow \frac{1}{V} \sum_j n_j W_j e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} - \frac{N_S}{V_S} W_{\mathbf{k}} = \frac{1}{V} \sum_i W_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} - \frac{N_S}{V_S} W_{\mathbf{k}}. \quad (9.25)$$

因此估计量为

$$\begin{aligned} \hat{P}(\mathbf{k}) &= V \frac{V_S^2}{N_S^2 \sum_{\mathbf{q}} |W_{\mathbf{q}}|^2} \left(\left| \frac{1}{V} \sum_i W_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} - \frac{N_S}{V_S} W_{\mathbf{k}} \right|^2 - \frac{1}{V} \frac{N_S}{V_S} \sum_{\mathbf{q}} |W_{\mathbf{q}}|^2 \right) \\ &= \frac{V}{\sum_{\mathbf{q}} |W_{\mathbf{q}}|^2} \left| \frac{V_S}{V} \frac{1}{N_S} \sum_i W_i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} - W_{\mathbf{k}} \right|^2 - \frac{V_S}{N_S}. \end{aligned} \quad (9.26)$$

其中 V_S/N_S 项扣除散粒噪声。

⁵¹我没有写成公式，是因为没有费心考虑该如何处理平方。

⁵²注意，如此定义的 $\bar{\rho}$ 不是实际未加权观测星系数与实际未加权巡天体积之比，因为 N_S 按星系加权， V_S 按微胞加权。MBW 未定义这些加权重 N_S, V_S ；他们的 V_S 表示实际巡天体积。我未能得到与他们给出的完全相同的 N_{eff} 形式。

练习。证明对未加权掩膜，即 $W(\mathbf{x}) = 0$ 或 1 ，式 (9.20) 变为

$$P(k) \approx \frac{V^2 \langle |\rho_{\mathbf{k}}^w - \langle \rho_{\mathbf{k}}^w \rangle|^2 \rangle - \langle \rho \rangle V_S}{\langle \rho \rangle^2 V_S}. \quad (9.27)$$

9.3 选择函数

上文假设 $\langle n_j \rangle = \langle \rho \rangle \delta V$ 。由于选择效应，这对观测星系并不成立。现在令 $n_j = 0$ 或 1 表示微胞内观测星系数，则

$$\langle n_j \rangle = S(\mathbf{x}_j) \langle \rho \rangle \delta V \Rightarrow \left\langle \frac{n_j}{S_j} \right\rangle = \langle \rho \rangle \delta V, \quad (9.28)$$

$S(\mathbf{x})$ 为选择函数。为校正这一效应，让每个观测星系 i 代表假定存在的 $1/S(\mathbf{x}_i)$ 个星系，定义微胞内经校正的星系数

$$n_j^c \equiv A \frac{W(\mathbf{x}_j)}{S(\mathbf{x}_j)} n_j = A \frac{W_j}{S_j} n_j, \quad (9.29)$$

A 是额外归一化因子。⁵³ 看起来似乎只是把第 9.2 节的 W_j 换成 W_j/S_j ，但两者表现不同，因为按式 (9.28)， S_j 会被期望值吸收。

现在得到

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{k}}^c &= \frac{A}{V} \sum_j n_j \frac{W_j}{S_j} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j}, \\ \langle \rho_{\mathbf{k}}^c \rangle &= \frac{1}{V} \sum_j \left\langle \frac{n_j}{S_j} \right\rangle W_j e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_j} = \frac{A \langle \rho \rangle}{V} \int_V W(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^d x = A \langle \rho \rangle W_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (9.30)$$

从而得到⁵⁴ (练习)

$$P(k) \approx \frac{V^2 \langle |\rho_{\mathbf{k}}^c - \langle \rho_{\mathbf{k}}^c \rangle|^2 \rangle - A^2 \langle \rho \rangle \int_V \frac{W(\mathbf{x})^2}{S(\mathbf{x})} d^d x}{\langle \rho \rangle^2 A^2 V \sum_{\mathbf{q}} |W_{\mathbf{q}}|^2}. \quad (9.31)$$

9.4 权重

红移巡天在较远距离、较高红移处每单位体积观测到的星系较少，因此更远体积元的采样较差，对估计的贡献具有更大不确定性。除以选择函数以补偿观测密度降低时，单个观测星系获得更高权重；如果不另加权重，所有体积元就获得相同权重。或许可以设 $W(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x})$ 来考虑较大的不确定性，使每个观测星系在估计中权重相同， $W/S = 1$ 。但这也不最优，因为如此会将大部分权重赋给较小的邻近巡天区域，而较小体积的宇宙方差更大，不是宇宙的良好样本。Feldman 等 [41] 证明，为使 $P(k)$ 的预期误差最小，最优折中是赋予权重⁵⁵

$$W(\mathbf{x}) = \frac{S(\mathbf{x})}{1 + \bar{n}(\mathbf{x})P(k)} = \frac{S(\mathbf{x})}{1 + S(\mathbf{x})\langle \rho \rangle P(k)}, \quad (9.32)$$

称为 FKP 权重，其中 $\bar{n} \equiv S(\mathbf{x})\langle \rho \rangle$ 是 $\mathbf{x}$ 处预期观测数密度。较远处 $S \ll 1$ ，得到 $W = S \ll 1$ ，每个观测星系对估计具有相同权重。较近处 $S \approx 1$ ，权重变得与位置无关，每个体积元获得相同权重。

注意，对不同 k 估计 $P(k)$ 时权重不同。因为本来就在估计 $P(k)$ ，这个过程似乎循环依赖；不过，使用恰好最优的权重并非至关重要。可以用 $P(k)$ 的先验知识设定权重；若有需要，再用第一轮估计的 $P(k)$ 重复估计，进行迭代。

⁵³ 可选 $A = N / \sum_j n_j W_j S_j^{-1}$ ，使 $\sum n_j^c = N$ ，即巡天中的实际星系数。

⁵⁴ MBW 将归一化因子 A 包含在 $W_{\mathbf{q}}$ 中，即 $\tilde{W}_{\mathbf{q}} = A W_{\mathbf{q}}$ ，所以分母不再出现 A 。

⁵⁵ Feldman 等 [41] 和 Peacock [1] 只写 $w(\mathbf{x}) = 1/[1 + \bar{n}(\mathbf{x})P(k)]$ ，但我认为他们的 w 必须指这里的 W/S ，否则就不能实现所述效果。

此前没有在 ξ 估计中讨论权重和选择函数。该情形下应用很直接：只需对随机星表施加选择函数，并对两个星表采用相同加权。对 ξ ，与 $P(k)$ 的 FKP 权重对应的做法，是给每对赋予权重 W^2 ，其中

$$W(r; z) = \frac{1}{1 + 4\pi\bar{n}(z)J_3(r)} = \frac{1}{1 + \bar{n}(z)V(r)\bar{\xi}(r)}, \quad (9.33)$$

r 是点对间隔， z 是平均红移 [41, 2]。

10 作为标准尺的重子声学振荡尺度

光子退耦前，重子-光子流体的声学振荡在物质分布中留下特定距离尺度，即光子退耦时的声学视界

$$r_d = \int_0^{t_d} \frac{c_s(t)}{a(t)} dt = \int_{z_d}^{\infty} \frac{c_s(z)}{H(z)} dz. \quad (10.1)$$

这一尺度在 CMB 各向异性中十分显著，对应 CMB 角功率谱中声学峰的间隔；据此可以直接测量在最后散射面上看到这一尺度所对应的角度，即声学视界角 ϑ_s 。要把观测角度换算为距离尺度，需乘以依赖宇宙学参数的角直径距离。不过，理论值 (10.1) 由早期宇宙物理决定，在标准宇宙学中只依赖参数 ω_m 和 ω_b ，而二者可由 CMB 声学峰的观测高度精确确定。因此， r_d 已知得非常精确。严格说，CMB 中看到的距离尺度 $r_* = 144.57 \pm 0.22$ Mpc，与物质分布中的重子声学振荡 (BAO) 尺度 $r_d = 147.21 \pm 0.23$ Mpc 略有不同。这是因为退耦不是瞬时发生的，而且光子数远多于重子数。CMB 反映的是光子平均最后一次与重子相互作用时的情况，对应 $z_* = 1089.80 \pm 0.21$ ；但晚于平均时刻与重子相互作用的光子，使振荡又持续了一小段时间。 r_d 中的 d 表示拖曳 (drag)，物质分布的 r_d 反映重子平均停止振荡的时刻，对应 $z_d = 1060.01 \pm 0.29$ 。这些数值为文献 [34] 的 Planck+BAO 结果。

BAO 尺度可表现为相应间隔处星系位置相关性的增强。在视线方向上，它对应红移差

$$\Delta z = H(z)r_d \equiv \frac{r_d}{D_H(z)}, \quad (10.2)$$

其中 $D_H(z) \equiv H(z)^{-1}$ 是红移 z 处的哈勃距离；在横向上，对应天空角间隔

$$\Delta\vartheta = \frac{r_d}{D_M(z)}. \quad (10.3)$$

测量星系分布统计量，并确定不同红移时这种增强相关出现在什么 $\Delta z, \Delta\vartheta$ 处，就可以确定 $H(z)$ 和 $D_M(z)$ ，进而确定正确的宇宙学。

相关函数 $\xi(\mathbf{s}) = \xi(s, \mu) = \xi(s_{\parallel}, s_{\perp})$ 衡量各个方向的间隔，结果常表示为加权几何平均

$$D_V(z) \equiv [zD_M(z)^2 D_H(z)]^{1/3} \quad (10.4)$$

以及比值

$$F_{\text{AP}}(z) \equiv \frac{D_M(z)}{D_H(z)}. \quad (10.5)$$

$\mathbf{s}$ 的三个分量中两个为横向、只有一个为径向，因此横向在数据中权重更大， D_M 可比 D_H 测得更精确。 F_{AP} 是第 7.6 节的 Alcock-Paczynski 参数。共动体积元为

$$dV = D_H(z) dz D_M(z)^2 d\Omega = D_V(z)^3 \frac{dz}{z} d\Omega. \quad (10.6)$$

相对于服从哈勃定律 $D(z) = H_0^{-1}z$ 的平直空间，体积元形状的“畸变”，即 Δz 与 $\Delta\vartheta$ 对应的共动距离之比，为

$$\frac{zD_H(z)}{D_M(z)} = \frac{z}{F_{\text{AP}}(z)}. \quad (10.7)$$

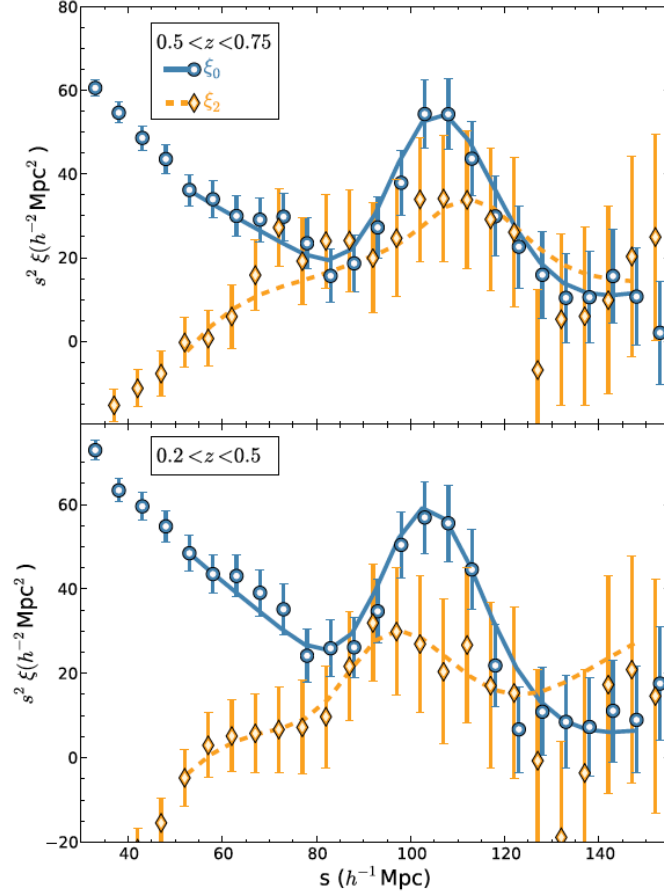


图 30: BOSS 巡天在两个不同红移分箱中测得的 BAO 特征附近两点相关函数的单极矩（蓝色）和四极矩（黄色）。这是文献 [42] 的图 11。

这个量在 $z = 0$ 时等于 1，在 Λ CDM 中随 z 增大而减小，见图 26，因为给定 Δz 在较高红移对应较短的共动间隔。实际中，从测得的 $\xi(s)$ 确定这些量更加复杂，因为 r_d 也略依赖于宇宙学，须作相应校正。此外，两点相关函数的峰不恰好位于 r_d ；需要计算理论 $\xi(s)$ 并与观测结果比较。

Ross 等 [42] 描述了如何用 SDSS-III BOSS 巡天的两点相关函数完成这一测定。这里给出该描述的简化版本。

首先假设一个基准宇宙学，用 CAMB 计算其线性功率谱 $P(k)$ ，再加入红移空间畸变和非线性效应，此处省略实现细节。接着对这个各向异性功率谱，更确切地说是其 $\ell = 0, 2, 4$ 多极矩，作傅里叶变换，得到基准宇宙学的各向异性两点相关函数 $\xi^{\text{fid}}(s, \mu)$ 及其多极矩。

基准宇宙学具有相应的 $H^{\text{fid}}(z)$ 、 $D_M^{\text{fid}}(z)$ 和 r_d^{fid} 。按其几何将观测红移转换为共动距离，再由数据计算观测相关函数。将 $\xi^{\text{obs}}(s, \mu)$ 与 $\xi^{\text{fid}}(s, \mu)$ 比较，应发现 BAO 特征在视线方向 ($\mu = 1$) 和横向 ($\mu = 0$) 分别偏移了因子

$$\alpha_{\parallel} \equiv \frac{H^{\text{fid}}(z)r_d^{\text{fid}}}{H(z)r_d}, \quad \alpha_{\perp} \equiv \frac{D_M^{\text{fid}}(z)r_d^{\text{fid}}}{D_M(z)r_d}. \quad (10.8)$$

如果过于简单地假设，不同宇宙学的影响只是按这些因子拉伸或压缩 $\xi(s, \mu) = \xi(s_{\parallel}, s_{\perp})$ ，就得到

$$\xi^{\text{obs}}(s_{\parallel}, s_{\perp}) = \xi^{\text{fid}}(\alpha_{\parallel}s_{\parallel}, \alpha_{\perp}s_{\perp}), \quad (10.9)$$

或

$$\xi^{\text{obs}}(s, \mu) = \xi^{\text{fid}}(s', \mu'), \quad (10.10)$$

其中 (练习)

$$s' = s\sqrt{\mu^2\alpha_{\parallel}^2 + (1 - \mu^2)\alpha_{\perp}^2}, \quad \mu' = \frac{\mu\alpha_{\parallel}}{\sqrt{\mu^2\alpha_{\parallel}^2 + (1 - \mu^2)\alpha_{\perp}^2}}. \quad (10.11)$$

于是观测单极矩和四极矩为

$$\begin{aligned} \xi_0^{\text{obs}}(s) &\equiv \int_0^1 \xi^{\text{obs}}(s, \mu) d\mu = \int_0^1 \xi^{\text{fid}}(s', \mu') d\mu \equiv \xi_0(s, \alpha_{\parallel}, \alpha_{\perp}), \\ \xi_2^{\text{obs}}(s) &\equiv \frac{5}{2} \int_0^1 \xi^{\text{obs}}(s, \mu) (3\mu^2 - 1) d\mu = \frac{5}{2} \int_0^1 \xi^{\text{fid}}(s', \mu') (3\mu^2 - 1) d\mu \\ &\equiv \frac{5}{2} [\xi_{\mu 2}(s, \alpha_{\parallel}, \alpha_{\perp}) - \xi_0(s, \alpha_{\parallel}, \alpha_{\perp})], \end{aligned} \quad (10.12)$$

最后一行定义了

$$\xi_{\mu 2}(s, \alpha_{\parallel}, \alpha_{\perp}) \equiv \int_0^1 \xi^{\text{fid}}(s', \mu') 3\mu^2 d\mu. \quad (10.13)$$

在这一步使用它，而不把上一式第二行整体定义为 $\xi_2(s, \alpha_{\parallel}, \alpha_{\perp})$ 。

现在必须考虑改变宇宙学还会以拉伸之外的方式改变 ξ^{obs} 。重点是拟合 r_d 附近较尖锐的 BAO 峰。峰出现在 $s = 100 h^{-1} \text{Mpc}$ 附近，因此只拟合 $50 < s < 150 h^{-1} \text{Mpc}$ 范围的 ξ^{obs} 。允许宇宙学变化改变 BAO 特征的振幅，但预期在 r_d 附近其他变化相对平滑。因此引入额外拟合参数 B_0, B_2 ，表示单极矩和四极矩中 BAO 特征的振幅缩放；再允许向 $s^2 \xi_{\ell}(s)$ 加上任意二阶多项式 $A_{\ell 1} + A_{\ell 2} s + A_{\ell 3} s^2$ ，表示平滑变化。得到模型

$$\begin{aligned} \xi_0^{\text{mod}}(s) &= B_0 \xi_0(s, \alpha_{\parallel}, \alpha_{\perp}) + A_{01} s^{-2} + A_{02} s^{-1} + A_{03}, \\ \xi_2^{\text{mod}}(s) &= \frac{5}{2} [B_2 \xi_{\mu 2}(s, \alpha_{\parallel}, \alpha_{\perp}) - B_0 \xi_0(s, \alpha_{\parallel}, \alpha_{\perp})] \\ &\quad + A_{21} s^{-2} + A_{22} s^{-1} + A_{23}, \end{aligned} \quad (10.14)$$

用它们拟合 $\xi_0^{\text{obs}}(s)$ 和 $\xi_2^{\text{obs}}(s)$ 。因此共有 10 个参数： $\alpha_{\parallel}, \alpha_{\perp}, B_0, B_2, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{21}, A_{22}, A_{23}$ ，但只关心 $\alpha_{\parallel}$ 和 $\alpha_{\perp}$ 的结果。其余八个是干扰参数，容纳我们不希望计算的 $\xi(s, \mu)$ 形状变化。所以该过程只旨在拟合 BAO 尺度，并非把完整理论 $\xi(s, \mu)$ 拟合到观测结果。

图 30 展示 BOSS 巡天的 ξ_0, ξ_2 ；BOSS [35] 对 $D_M(z)$ 和 $H(z)$ 的结果见图 31，关于 $D_M(z)$ 、 $D_V(z)$ 、 $D_H(z)$ 的 BAO 结果“全球汇编”见图 32。

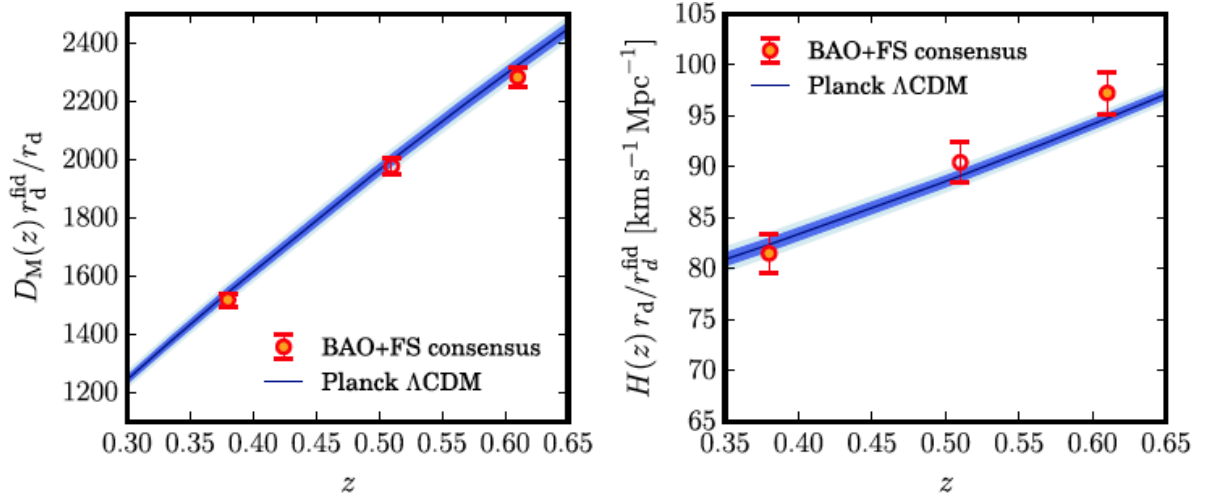


图 31: BOSS 巡天由 BAO 测得的共动角直径距离 $D_M(z)$ 和哈勃参数 $H(z)$ 。蓝线是采用 Planck [19] 宇宙学参数的 Λ CDM 预言。实线与虚线表示最佳拟合模型。FS 表示“全形状”: BOSS 团队分别由 BAO 特征的位置, 以及相关函数和功率谱的完整形状, 独立确定这些量。这是文献 [35] 图 12 的一部分。

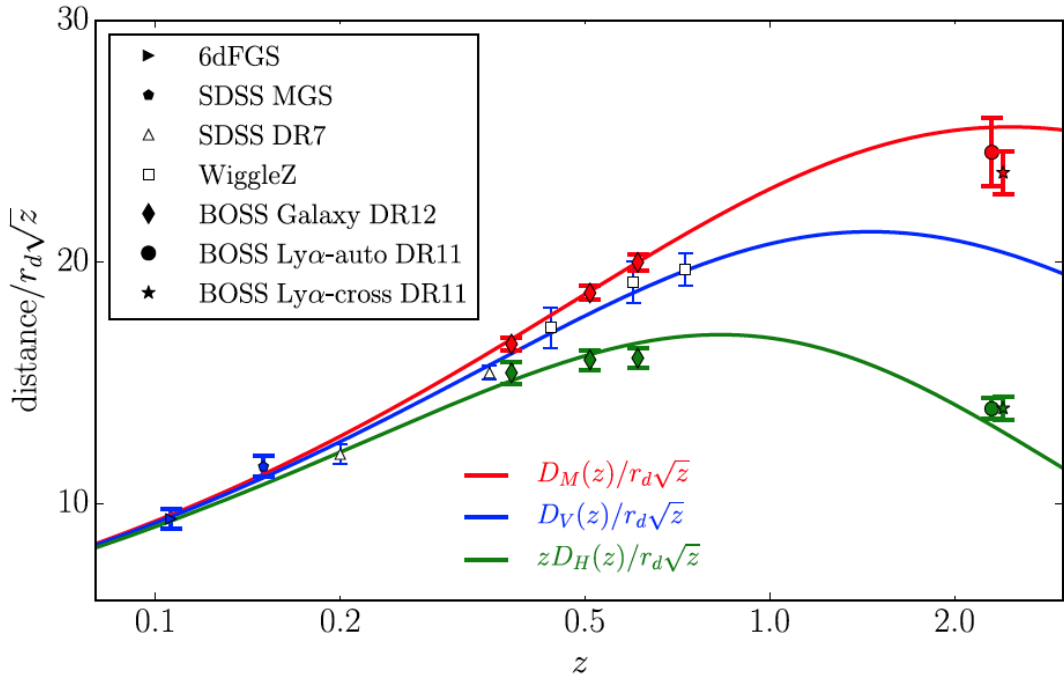


图 32: 不同巡天由 BAO 确定的 $D_M(z)$ 、 $D_V(z)$ 和 $D_H(z)$ 的汇编。用 $\sqrt{z}$ 缩放, 只是为了压缩曲线, 使其更好地放入图中, 同时清晰显示误差棒。实线为 $\Omega_m = 0.3156, h = 0.6727$ 的 Λ CDM 预言。这是文献 [35] 的图 14。eBOSS [61] 的更新结果见图 27。

11 高阶统计量

11.1 N 点相关函数与 $(N-1)$ 阶谱

仿照两点相关函数，对于连续密度扰动场 $\delta(\mathbf{x})$ ，我们定义 N 点相关函数

$$\xi^{(N)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \equiv \langle \delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2) \cdots \delta(\mathbf{x}_N) \rangle. \quad (11.1)$$

对于离散天体的分布，

$$dP = \langle \rho \rangle^N \langle [1 + \xi^{(N)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)] \rangle dV_1 dV_2 \cdots dV_N \quad (11.2)$$

是在 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ 处找到 N 个天体的概率。注意，这些量在 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$ 的置换下不变。

从 N 点相关函数中减去低阶相关的全部贡献，剩下的部分就是连通 N 点相关函数 (connected N -point correlation function): ⁵⁶

$$\zeta^{(N)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \equiv \xi^{(N)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) - \sum_P \zeta^{(N_1)} \cdots \zeta^{(N_n)}, \quad (11.3)$$

其中 $\sum N_i = N$ ， $\sum_P$ 对集合 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ 划分为较小子集的所有方式求和。特别地，

$$\begin{aligned} \zeta^{(1)}(\mathbf{x}) &\equiv \xi^{(1)}(\mathbf{x}) = \langle \delta(\mathbf{x}) \rangle = 0, \\ \zeta^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &\equiv \xi^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \zeta^{(1)}(\mathbf{x}_1) \zeta^{(1)}(\mathbf{x}_2) = \xi^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \\ \zeta^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &\equiv \xi^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) - \zeta^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \zeta^{(1)}(\mathbf{x}_3) \\ &\quad - \zeta^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) \zeta^{(1)}(\mathbf{x}_2) - \zeta^{(2)}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \zeta^{(1)}(\mathbf{x}_1) \\ &\quad - \zeta^{(1)}(\mathbf{x}_1) \zeta^{(1)}(\mathbf{x}_2) \zeta^{(1)}(\mathbf{x}_3) \\ &= \xi^{(3)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3), \\ \zeta^{(4)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) &\equiv \xi^{(4)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) - \zeta^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \zeta^{(2)}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \\ &\quad - \zeta^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) \zeta^{(2)}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4) - \zeta^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4) \zeta^{(2)}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3). \end{aligned} \quad (11.4)$$

因此，只有在 $N \geq 4$ 时，连通相关函数才不同于完整相关函数。

对于高斯密度扰动， $N > 2$ 时有 $\zeta^{(N)} = 0$ ，所以高斯场的统计性质完全由 $\xi^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ 决定，而连通高阶统计量度量非高斯性。

假定统计均匀性， $\xi^{(N)}$ 只依赖于各点之间的间距。选取一点，例如 $\mathbf{x}_N$ ，作为参考点，并写成 $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_N + \mathbf{r}_i$ ，则

$$\xi^{(N)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) = \xi^{(N)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N-1}). \quad (11.5)$$

由于置换不变性，可以按长度排列 $\mathbf{r}_i$ ，使 $|\mathbf{r}_1| \leq |\mathbf{r}_2| \leq \cdots \leq |\mathbf{r}_{N-1}|$ ； $\xi^{(N)}$ 在 $d^{(N-1)}$ 维空间的这一子集上的取值就能将它完全确定。不过，由于参考点可以自由选取，还存在额外的对称性。对于 $\xi^{(2)}$ ，这一对称性是 $\xi^{(2)}(\mathbf{r}) = \xi^{(2)}(-\mathbf{r})$ ；下一小节讨论 $\xi^{(3)}$ 。

如果还假定统计各向同性，那么将整个 N 点构型旋转时， $\xi^{(N)}$ 不变。可以旋转构型（或坐标系），使 $\mathbf{r}_1$ 平行于 x 轴， $\mathbf{r}_2$ 位于 xy 平面内（若 $d > 3$ ，则依此类推），从而使 $\xi^{(N)}$ 所依赖的分量数降为 $1 + 2 + \cdots + d + \cdots + d$ ，其中共有 $N-1$ 项。因此， $\xi^{(2)}$ 依赖一个分量 (r)， $\xi^{(3)}$ 依赖 $1 + 2 = 3$ 个分量（对于 $d \geq 2$ ），而 $\xi^{(4)}$ 依赖 $1 + 2 + 3 = 6$ 个分量（对于 $d \geq 3$ ）。（进入红移空间后，统计各向同性不再成立， $\xi^{(N)}$ 将依赖更多分量。）

⁵⁶我不知道它是否有标准记号； ζ 是三点相关函数通常采用的记号（无论是否连通，因为对三点相关函数来说二者相同）。

仿照功率谱，我们定义 $(N-1)$ 阶谱⁵⁷

$$P^{(N-1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_N) \equiv V^{N-1} \langle \delta_{\mathbf{k}_1} \delta_{\mathbf{k}_2} \cdots \delta_{\mathbf{k}_N} \rangle, \quad (11.6)$$

其中

$$\delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{V} \int d^d x \delta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (11.7)$$

利用周期性边界条件和统计各向同性，

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\mathbf{k}_1} \cdots \delta_{\mathbf{k}_N} \rangle &= \frac{1}{V^N} \int d^d x_1 \cdots d^d x_N e^{-i \sum_{i=1}^N \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}_i} \langle \delta(\mathbf{x}_1) \cdots \delta(\mathbf{x}_N) \rangle \\ &= \frac{1}{V^N} \int d^d r_1 \cdots d^d r_{N-1} d^d x e^{-i \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{k}_i \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{r}_i)} e^{-i\mathbf{k}_N \cdot \mathbf{x}} \\ &\quad \times \langle \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}_1) \cdots \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}_{N-1}) \delta(\mathbf{x}) \rangle \\ &= \frac{1}{V^N} \int d^d r_1 \cdots d^d r_{N-1} e^{-i \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_i} \xi^{(N)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N-1}) \\ &\quad \times \int d^d x e^{-i(\sum_{i=1}^N \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (11.8)$$

若 $\sum_{i=1}^N \mathbf{k}_i = 0$ ，最后一个积分等于 V ；否则为零。因此，当 $\mathbf{k}_N = -\sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{k}_i$ 时，

$$P^{(N-1)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N) = \int d^d r_1 \cdots d^d r_{N-1} e^{-i \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_i} \xi^{(N)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N-1}), \quad (11.9)$$

否则 $P^{(N-1)}$ 为零。因此，由于统计均匀性， $P^{(N-1)}$ 的非零部分只依赖于前 $N-1$ 个波矢，可记为

$$P^{(N-1)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{N-1}). \quad (11.10)$$

大间距下相关函数趋于零，因此可以将式 (11.9) 中的积分范围扩展至无穷大。于是， N 点相关函数与 $(N-1)$ 阶谱构成一对 $(N-1)d$ 维傅里叶变换，并有

$$\begin{aligned} \xi^{(N)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N-1}) &= \frac{1}{(2\pi)^{(N-1)d}} \int d^d k_1 \cdots d^d k_{N-1} e^{+i \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_i} \\ &\quad \times P^{(N-1)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{N-1}). \end{aligned} \quad (11.11)$$

采用傅里叶积分记号，以 $\delta(\mathbf{k})$ 代替 $V\delta_{\mathbf{k}}$ ，可写为

$$\langle \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \cdots \delta(\mathbf{k}_N) \rangle = (2\pi)^d \delta_D^d \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{k}_i \right) P^{(N-1)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{N-1}). \quad (11.12)$$

11.2 三点相关函数与双谱

对于 $N=3$ ，假定统计均匀性，就有三点相关函数

$$\zeta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \langle \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}_2) \rangle \quad (11.13)$$

及其傅里叶变换，即双谱：

$$\begin{aligned} B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) &= \int d^d r_1 d^d r_2 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} \zeta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \\ \zeta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int d^d k_1 d^d k_2 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \end{aligned} \quad (11.14)$$

⁵⁷同样，我不知道是否存在标准记号，或其标准名称是什么。“ $(N-1)$ 阶谱”这一称呼和 $P^{(N-1)}$ 这一记号是我自己采用的。对于 $N=3$ 和 $N=4$ ，标准记号和名称分别是 B ，即双谱 (bispectrum)，以及 T ，即三谱 (trispectrum)。 $P^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = V \langle \delta_{\mathbf{k}_1} \delta_{\mathbf{k}_2} \rangle$ 与我们先前定义的功率谱 $P(k) = \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$ 相同。下面将得到 $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$ 。由于 $\delta(\mathbf{x})$ 是实数， $\delta_{\mathbf{k}_2} = \delta_{-\mathbf{k}_1}^*$ 等于 $\delta_{\mathbf{k}_1}^*$ ，所以确实有 $\delta_{\mathbf{k}_1} \delta_{\mathbf{k}_2} = |\delta_{\mathbf{k}_1}|^2$ 。

其中

$$\langle \delta_{\mathbf{k}_1} \delta_{\mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}_3} \rangle = \frac{1}{V^2} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3} B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \quad (11.15)$$

或

$$\begin{aligned} \langle \delta(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k}_3) \rangle &= V^3 \langle \delta_{\mathbf{k}_1} \delta_{\mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}_3} \rangle \\ &\longrightarrow (2\pi)^d \delta_D^d(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2). \end{aligned} \quad (11.16)$$

双谱也可以记为 $B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ ，其中默认满足 $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0$ 。

假定统计各向同性， $\zeta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ 和 $B(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ 都是三角形的函数。对于 ζ ，三角形由三个点构成；对于 B ，三角形由波矢构成的闭合回路 $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0$ 构成。二者都依赖确定一个三角形所需的三个标量，例如三条边的长度，或两条边的长度及其夹角。

三个变量的函数已经不便研究和绘图。可以只关注某些选定的三角形形状，例如等边三角形。

另一种方法是多极展开 [43]。将双谱表示为边长 k_1 、 k_2 和夹角 θ 的函数，并将角度依赖展开为勒让德多项式：

$$B(k_1, k_2, \theta) = \sum_{\ell} B_{\ell}(k_1, k_2) L_{\ell}(\cos \theta), \quad (11.17)$$

其中

$$B_{\ell}(k_1, k_2) = \frac{2\ell + 1}{2} \int_{-1}^1 B(k_1, k_2, \theta) L_{\ell}(\cos \theta) d \cos \theta. \quad (11.18)$$

对三点相关函数作同样的展开：

$$\zeta(r_1, r_2, \theta) = \sum_{\ell} \zeta_{\ell}(r_1, r_2) L_{\ell}(\cos \theta), \quad (11.19)$$

其中

$$\zeta_{\ell}(r_1, r_2) = \frac{2\ell + 1}{2} \int_{-1}^1 \zeta(r_1, r_2, \theta) L_{\ell}(\cos \theta) d \cos \theta. \quad (11.20)$$

预期只有最低的几个多极项重要。这样更容易展示结果，因为每个多极项都能画成二维等高线图或色彩图。注意，这里假定了统计各向同性；角度与三角形的形状有关，而非像第 7 章那样表示相对于视线的方向。加入红移空间畸变后， ζ 和 B 将成为更多变量的函数。

例：在三维空间中建立 ζ_{ℓ} 与 B_{ℓ} 的关系。（此例来自文献 [43]。）这里需要式 (5.30)，

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = 4\pi \sum_{\ell m} i^{\ell} j_{\ell}(kx) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}) = 4\pi \sum_{\ell m} i^{\ell} j_{\ell}(kx) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{x}}) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (11.21)$$

以及式 (5.28)，

$$L_{\ell}(\cos \vartheta_n) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_m Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{n}}_1) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{n}}_2). \quad (11.22)$$

从式 (11.14) 出发, 代入式 (11.17),

$$\begin{aligned}
\zeta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3k_1 d^3k_2 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} \sum_{\ell} B_{\ell}(k_1, k_2) L_{\ell}(\cos \vartheta_k) \\
&= \frac{1}{4\pi^4} \sum_{\ell} \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \int k_1^2 dk_1 \int k_2^2 dk_2 i^{\ell_1} i^{\ell_2} j_{\ell_1}(k_1 r_1) j_{\ell_2}(k_2 r_2) B_{\ell}(k_1, k_2) \\
&\quad \times \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_m \int d\Omega_1 d\Omega_2 Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{r}}_1) Y_{\ell_1 m_1}(\hat{\mathbf{k}}_1) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{\mathbf{r}}_2) \\
&\quad \times Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{\mathbf{k}}_2) Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{k}}_1) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{k}}_2) \\
&= \frac{1}{4\pi^4} \sum_{\ell} \int k_1^2 dk_1 \int k_2^2 dk_2 (-1)^{\ell} j_{\ell}(k_1 r_1) j_{\ell}(k_2 r_2) B_{\ell}(k_1, k_2) \\
&\quad \times \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_m Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{r}}_1) Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{r}}_2) \\
&= \frac{1}{4\pi^4} \sum_{\ell} \int k_1^2 dk_1 \int k_2^2 dk_2 (-1)^{\ell} j_{\ell}(k_1 r_1) j_{\ell}(k_2 r_2) B_{\ell}(k_1, k_2) L_{\ell}(\cos \vartheta_r),
\end{aligned} \tag{11.23}$$

从中可以读出

$$\zeta_{\ell}(r_1, r_2) = \frac{1}{4\pi^4} \int k_1^2 dk_1 \int k_2^2 dk_2 (-1)^{\ell} j_{\ell}(k_1 r_1) j_{\ell}(k_2 r_2) B_{\ell}(k_1, k_2). \tag{11.24}$$

从理论上预期, 宇宙学密度场的双谱大小与 $P(k)^2$ 同阶。这促使我们定义约化双谱 (reduced bispectrum)

$$Q(k_1, k_2, k_3) \equiv \frac{B(k_1, k_2, k_3)}{P(k_1)P(k_2) + P(k_2)P(k_3) + P(k_3)P(k_1)}. \tag{11.25}$$

11.3 三点相关函数的测量

第 8 章表明, 两点相关函数的最佳估计量 (使偏差和方差最小) 是 Landy-Szalay 估计量, 可以形式化地写成

$$\hat{\xi}_{\text{LS}} = \frac{(D - R)^2}{R^2}. \tag{11.26}$$

将其推广到 N 点相关函数, 就得到 Szapudi-Szalay 估计量 [44]:

$$\hat{\xi}_{\text{SS}}^{(N)} = \frac{(D - R)^N}{R^N}. \tag{11.27}$$

对于三点相关函数, 它变为

$$\hat{\xi}_{\text{SS}} = \frac{(D - R)^3}{R^3} = \frac{DDD - 3DDR + 3DRR - RRR}{RRR}, \tag{11.28}$$

其中 DDD 等表示符合给定三角形构型的数据点和随机点三元组的数目。需要对构型分箱, 例如采用 $(r_1 \pm \frac{1}{2}\Delta r_1, r_2 \pm \frac{1}{2}\Delta r_2, \theta \pm \frac{1}{2}\Delta\theta)$ 这样的箱; 与第 8 章处理点对计数时一样, 需要用四种三元组各自的总数将计数归一化。(也可以将数据星表和随机星表合并成一个 $D - R$ 星表, 其中随机点的权重为负, 然后只计数 $D - R$ 三元组。)

这一估计量的计算成本与三元组数目成正比, 即按 N^3 增长, 其中 N 是数据点或随机点的数目。通常使用的随机点远多于数据点, 所以这里相关的 N 是随机点数。通常只需要计算到某个 r_{max} 的相关函数, 因此, 可以将点组织成便于跳过间距大于 r_{max} 的三元组的数据结构, 以节省计算; 但即便如此, 对于大型巡天, 计算成本仍然是个问题。

Slepian 和 Eisenstein [45] 提出了一种计算成本按 N^2 增长的近似方法, 对于足够大的巡天, 它会更快。⁵⁸另见文献 [46]。

⁵⁸我还没有读他们的论文, 因此这里暂不作更多介绍。

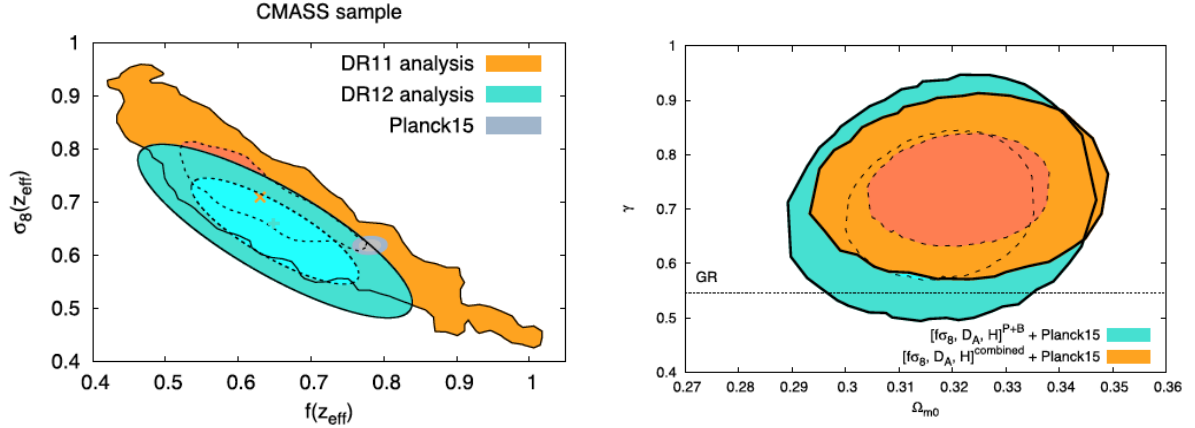


图 33: 左: 利用 BOSS 巡天 CMASS 样本测量的 f 和 σ_8 。CMASS 样本的有效红移为 $z = 0.57$ 。“Planck15”指使用 Planck 数据确定的宇宙学参数得到的 Λ CDM 宇宙学理论预言（即并非 Planck 对 f 和 σ_8 的测量）。此图为文献 [49] 的图 13。右: 联合 BOSS 和 Planck 数据对增长指数 γ 和 Ω_m 的约束，为文献 [49] 的图 18。

11.4 宇宙学中的高阶统计量

对于高斯扰动，高阶统计量（双谱、三点相关函数，以及约化的、阶数高于三的相关函数）为零。一般认为原初扰动是高斯的，或非常接近高斯（Planck 未发现原初非高斯性的任何信号；最简单的暴胀模型预言非常接近高斯的原初扰动）。线性演化保持扰动的高斯性。因此，即使在大尺度上，高阶统计量测量的也是非线性效应，从而可以检验修改引力。另一种用途是检验原初非高斯性。将高阶统计量的结果与功率谱和 / 或两点相关函数的结果结合，可以打破 f 与 σ_8 （或偏置）之间的简并，即可以分别确定二者，而不只是确定其乘积。

（这里应该增加一节高阶微扰论，说明高阶相关如何产生。）

11.5 星系巡天的结果

文献 [47] 和 [48] 讨论了 BOSS 巡天测量的三点相关函数，文献 [49] 描述了 BOSS 巡天测量的双谱。

图 33 展示了 BOSS 对增长率 f 、 σ_8 和增长指数 γ 的测定。BOSS（结合 Planck 数据）得到 $\gamma = 0.733 \pm 0.069$ ，与广义相对论预言的 $\gamma = 0.55$ 相差 2.7σ 。他们指出：“这一张力可能源于：(i) $f\sigma_8$ 测量值的统计涨落；(ii) BOSS 或 Planck15 数据中未计入的系统不确定度；(iii) CDM 或广义相对论引力模型失效的迹象。未来星系巡天采用更多红移箱和更精确的数据，可能有助于理解这一张力，揭示这种差异的来源。” [49]

12 星系巡天

12.1 历史巡天

本节的部分材料来自文献 [50]。

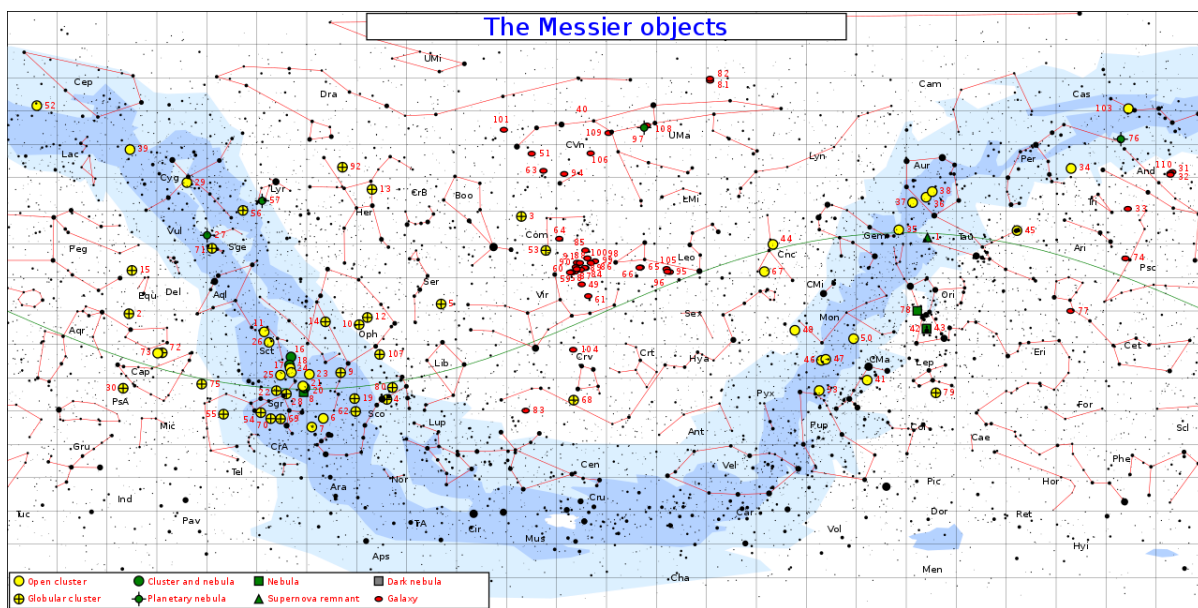


图 34: 标出梅西耶天体的星图。来自维基百科, 依据 GNU 自由文档许可证复制: https://en.wikipedia.org/wiki/en:GNU_Free_Documentation_License。

12.1.1 星云表

法国天文学家 Charles Messier (1730–1817) 编制了一份天空中长期不变的弥漫天体目录。他主要对彗星感兴趣, 因此编制这份目录, 是为了不把这些看起来像彗星、实际上却不是彗星的天体弄混, 因为它们并不移动。1771 年的第一版列出了 45 个天体, 1781 年他将目录扩充到 103 个。根据梅西耶的笔记, 后来又增补了一些天体, 最终的目录《星云与星团表》(*Catalogue des Nébuleuses et des Amas d'Étoiles*) 共有 110 个天体。其中许多是我们银河系内的星团 (球状星团或疏散星团) 或星云 (行星状星云或弥漫星云), M1, 即蟹状星云, 则是超新星遗迹; 但其中有 41 个星系 (M31–33、M49、M51、M58–61、M63–66、M74、M77、M81–91、M94–96、M98–102、M104–106、M108–110)。见图 34。

William 和 Caroline Herschel 于 1786 年编制了自己的《星云和星团目录》。到 1810 年, 他们已将其扩展至北方纬度可见的 2500 个天体。John Herschel 将它扩展为 1864 年的《星云与星团总表》(*General Catalogue of Nebulae and Clusters*), 共有 5079 个天体, 其中包括从南非看到的天体。John Dreyer 根据许多天文学家的观测, 于 1888 年编制了包含 7840 个天体的《星云和星团新总表》(*New General Catalogue of Nebulae and Clusters of Stars, NGC*)。他在 1895 年和 1908 年又编制了两份《索引星表》(*Index Catalogues, IC*), 包含 5386 个额外天体。这些目录中的大多数天体是星系。当时还不知道星系的真实本质。这些早期目录基本上包含所有已知的弥漫天体, 并非均匀巡天的产物, 因此并不适合测量宇宙的大尺度结构。

12.1.2 二维巡天

利克巡天 (Lick Survey) [21] 首次提供了对宇宙大尺度结构的清晰认识。第 4 章已提及它, 见图 12。这项巡天于 1950–1967 年使用利克天文台的 0.5 米折射望远镜进行, 覆盖北银半球和约一半南银半球, 极限星等约为 $m_* = 19$, 包含 80 多万个星系。Shane 和 Wirtanen 将天空划分为 $10' \times 10'$ 的小格, 以目视和手工方式统计每一格的星系数目。位于南加利福尼亚的帕洛马施密特望远镜, 口径为 1.22 米, 即 48 英寸, 于 1948 年建成。(1986 年更名为 Samuel Oschin 望远镜。) 它开启了施



图 35: 帕洛马巡天红光底片上一个 $1^\circ \times 1^\circ$ 的区域，位于后发座星系团所在天区。

密特望远镜的时代；这种望远镜旨在以较小像差提供宽视场，因此适合巡天。20 世纪 50 年代，它用于帕洛马巡天 (Palomar Sky Survey, POSS I)。该巡天用 936 对蓝敏和红敏的 $6^\circ \times 6^\circ$ 照相底片，覆盖了赤纬 -30° 以北的全天。蓝光的极限星等约为 19，红光约为 20。世界各地的天文台获得了这些图像的副本。我记得在 1980 年前后曾在赫尔辛基天文台看过它们（纯粹出于好奇）。现在可以通过数字方式访问，例如在 https://archive.stsci.edu/cgi-bin/dss_form。图 35 给出了一个例子。20 世纪 70 年代，澳大利亚和智利的类似英国及 ESO 施密特望远镜完成了南天的覆盖。

1990 年的 APM (Automated Plate Measuring, 自动底片测量) 巡天 [51]，见图 36，覆盖南银半球的 4300 平方度，使用英国施密特望远镜取得的 185 张底片。它没有以目视方式挑选星系，而是使用“剑桥的 SERC 自动底片测量系统”将巡天底片数字化，探测和分析星系图像，并给出位置与星等。其极限星等为 $m_* = 20.5$ ，比利克巡天更深，包含 200 多万个星系。除了加快处理、使人们免于从事这一繁琐工作外，自动化系统还有一个优点，即保证对整个巡天天区进行一致的处理。

12.1.3 红移巡天

要得到第三个维度，就必须测量星系的红移。这比仅仅拍摄天空图像、测量星系位置费力得多。获取优质光谱所需收集的光，远多于确定图像位置所需的光。

第一个范围足以描绘大尺度结构的红移巡天，是哈佛-史密松天体物理中心 (Center for Astrophysics, CfA) 红移巡天。实际上有两次巡天：1977–1982 年、极限星等为 14.5 的 CfA1，以及 1985–1995 年、极限星等为 15.5 的 CfA2。CfA2 包含北天的 18000 个星系，以赤纬厚度为 6° 的切片逐步开展。图 37 展示了他们于 1986 年发表的第一张切片 [53]。可以说，这是我们第一次看到星系分布的三维结构：除了星系团，还出现了大空洞，以及延伸尺度远大于星系团体积的高密度结构（片状和 / 或纤维状）。CfA1 巡天不够深（未达到足够暗的星等），因而未能揭示这些结构。拉斯坎帕纳斯红移巡

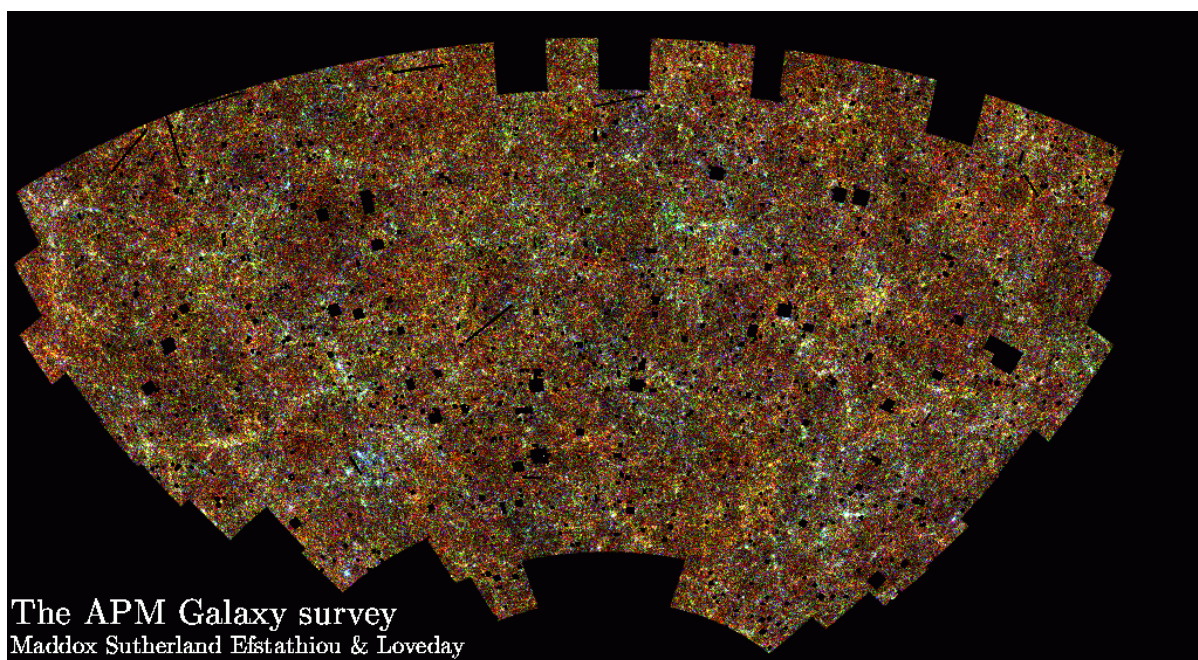


图 36: APM 星系巡天: 星系数密度图。

天 (Las Campanas Redshift Survey) [54] 于 1988–1994 年使用智利的拉斯坎帕纳斯望远镜测量了 26418 个星系的红移。巡天覆盖 700 多平方度，中位红移为 $z = 0.1$ (30000 km/s)，因此比 CfA2 深得多。见图 38。2dF 星系红移巡天 (<http://www.2dfgrs.net/>) 使用英澳望远镜上的 2dF 多光纤光谱仪，可在直径 2° 的视场内同时观测 400 个天体 [55]。源星表来自 APM 巡天。它覆盖两个长条天区 (另有一些随机的小天区)，共 1500 平方度，星等限制为 19.45，见图 39。共获得 221414 个星系的可靠红移，中位红移为 $z = 0.11$ 。最终数据发布于 2003 年。

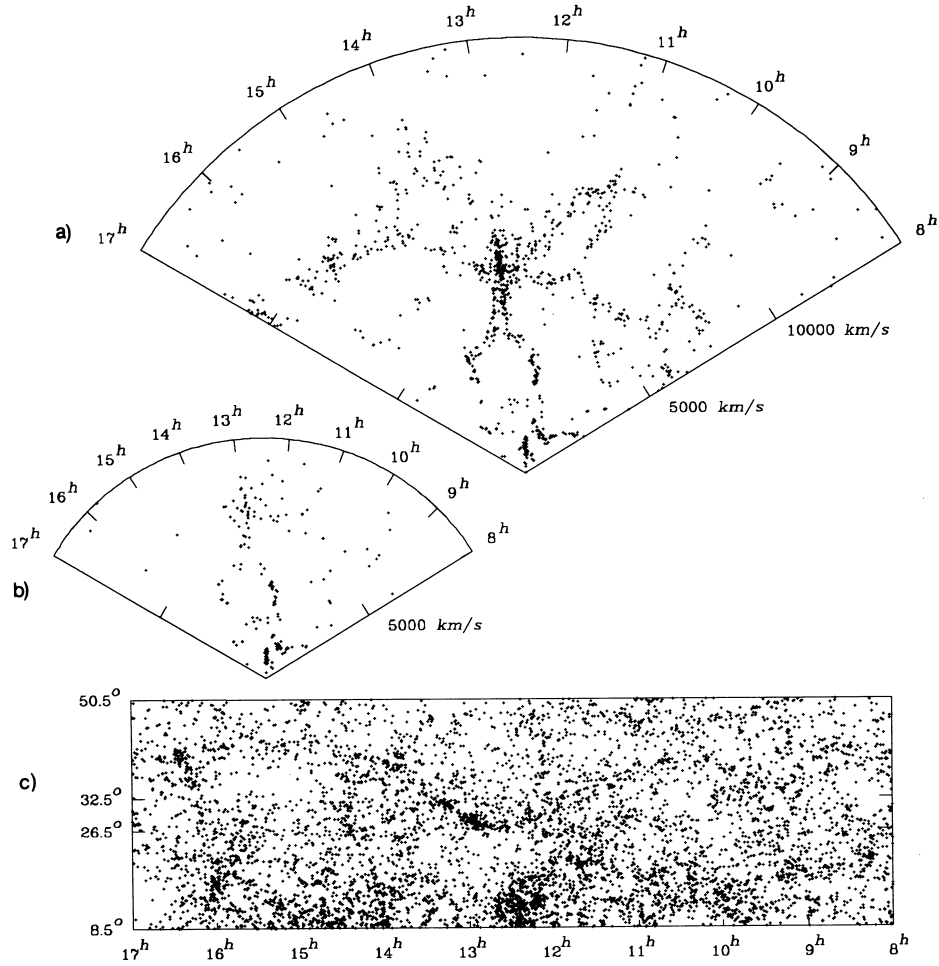


图 37: (a) CfA2 巡天的第一张切片, 赤纬范围 $26.5^\circ \leq \delta \leq 32.5^\circ$, 包含 1061 个星系。红移用速度单位表示: 图延伸到 15000 km/s, 即 $z = 0.05$ 。后发座星系团位于中心, 被上帝之指效应沿径向拉长。从 17^h、10000 km/s 到 8^h、6000 km/s 呈弧形延伸的狭窄高密度结构被命名为长城。巡天向更低和更高赤纬延伸后证实, 这一结构确实沿该方向延展, 呈片状而非纤维状。(b) 同 (a), 但仅保留 $m \leq 14.5$ 且 $v \leq 10000$ km/s 的 182 个星系。(c) Zwicky 星表中 $m \leq 15.5$ 的星系天图, CfA 以这份星表作为红移巡天的起点。来自文献 [53]。

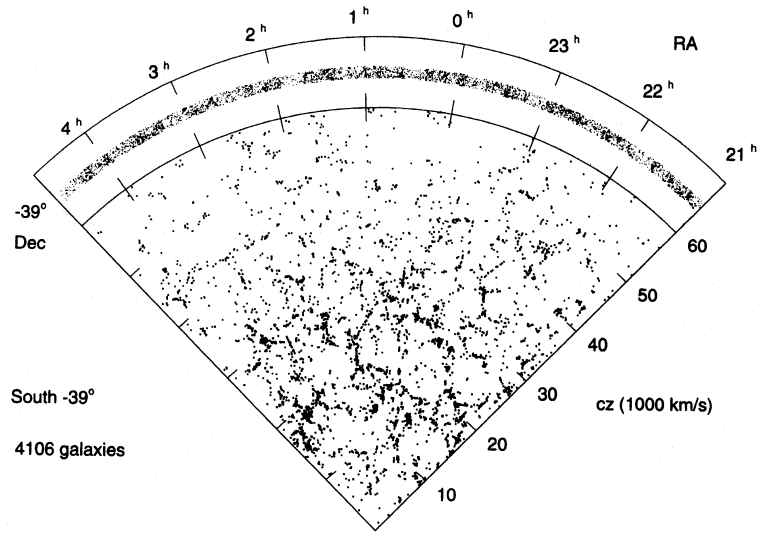


图 38: 拉斯坎帕纳斯红移巡天六张切片中的一张。切片的赤纬厚度为 1.5° 。来自文献 [54]。

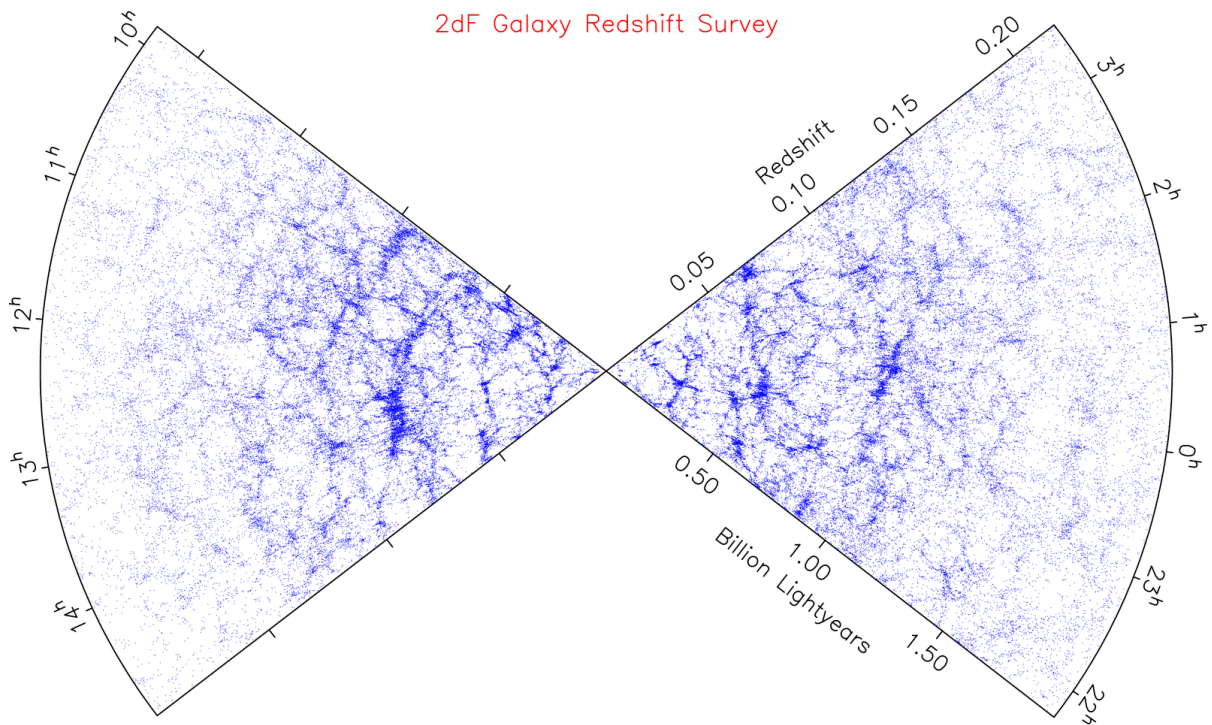


图 39: 2dF 星系红移巡天。左侧锥体为沿天赤道、最宽达 10° 的长条天区，可与图 1 比较。右侧锥体为以赤纬 $\delta = -30^\circ$ 为中心、最宽达 15° 的长条天区。

12.1.4 弱引力透镜巡天

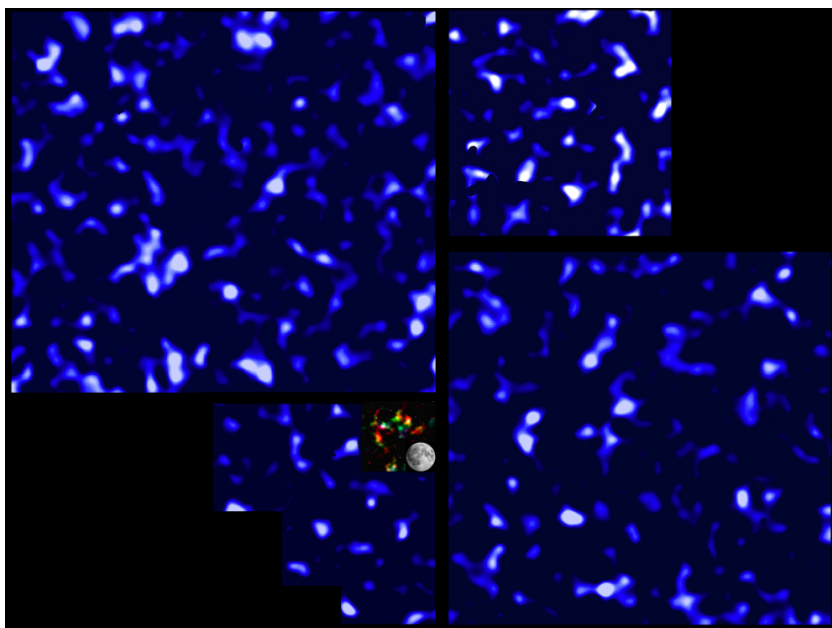


图 40: 通过弱引力透镜测得的 4 个 CFHTLenS 天区的质量分布。中央彩色插图展示了 CFHTLenS 之前最大的弱透镜质量图 (COSMOS 暗物质图, 图片来源: NASA、ESA、P. Simon 和 T. Schrabback), 并按比例画出了满月。来自 <https://www.cfht.hawaii.edu/en/news/CFHTLenS/>。图片来源: Van Waerbeke、Heymans 和 CFHTLenS 合作组。

弱引力透镜可以用于描绘包括暗物质在内的所有物质的分布。配套课程《引力透镜》会讨论弱透镜。简单来说, 遥远星系与我们之间的质量分布通过引力弯曲光路, 从而使星系图像畸变。对于大多数星系, 这个效应很小, 畸变量约为 1%; 在这一弱透镜范围内, 它表现为图像沿某个方向被拉长。由于不知道图像未经畸变时的形状, 只能统计地确定畸变: 即天空中某个小区域内许多星系的平均形状如何偏离圆对称。因此, 弱透镜巡天必须有极大量的星系图像才有用。观测到的平均畸变称为剪切 (shear), 它度量观测者与源星系之间积分后的质量, 并赋予权重, 使视线中途的质量权重最大。对这一积分质量度量, 更专业的名称是会聚 (convergence), 记作 κ ; 实际上, 这个量是加权面质量密度 (每单位立体角) 相对于宇宙平均密度所对应背景值的偏离, 再以一个区分弱透镜和强透镜的临界值归一化。

因此, 弱透镜巡天可以给出天空的二维质量图。对如此大量的星系获取精确的光谱红移并不现实, 不过二维质量图也不需要这些红移, 只需要测光红移提供的粗略估计: 在几个不同波段拍摄图像, 得到星系的“颜色”, 由此给出其红移的概率分布。将源星系分入不同的测光红移箱, 可以得到关于质量分布第三维的一定信息, 即层析 (tomography)。这种红移箱的宽度通常至少为 $\Delta z = 0.2$ 。

对红移巡天, 我将“历史巡天”的截止时间取在 2000 年前后; 对弱透镜巡天, 则取在 2020 年前后。随着 Euclid、LSST 和 Roman 的到来, 现代弱透镜巡天时代才刚刚开始。

加法夏望远镜透镜巡天 (Canada–France–Hawaii Telescope Lensing Survey, CFHTLenS) 在五个光学波段覆盖了 154 平方度的天空, 分布在 4 个不同天区, 极限星等为 24.5。平均每平方角分有 14 个可用于透镜分析的星系 [56, 57]。所得四个天区的质量图见图 40。数据采集于 2003–2008 年。分析论文很多 (见 <https://www.cfhtlens.org/astronomers/publications>), 例如文献 [58] 使用了 420 万个 $m \leq 22$ 、红移 $0.2 \leq z \leq 1.3$ 的星系图像进行分析。千平方度巡天 (Kilo-Degree Survey, KiDS; <https://kids.strw.leidenuniv.nl/>) 是欧洲南方天文台 (ESO) 于 2011 年开始的一项巡天, 使用

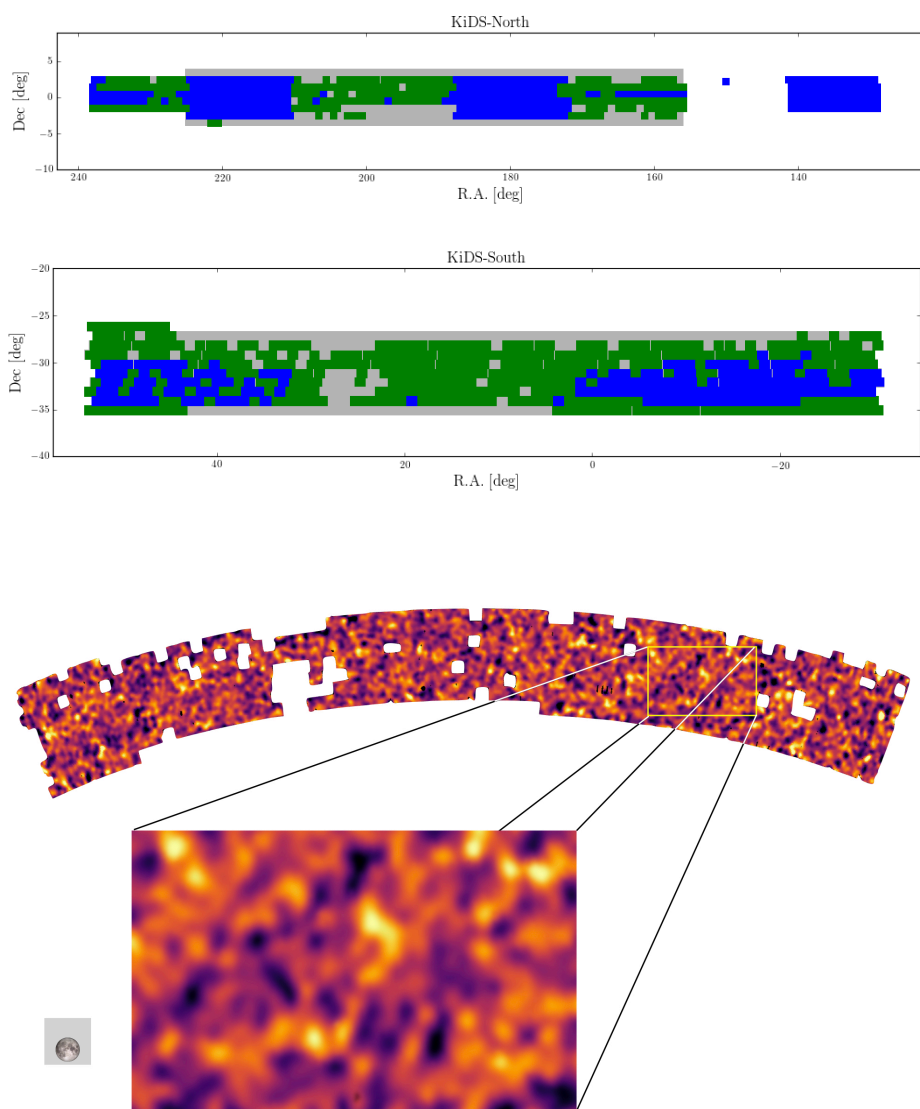


图 41: KiDS 巡天。上图: 第 1-3 次数据发布覆盖的区域为蓝色, DR4 新增区域为绿色, 计划覆盖的 1350 平方度区域以灰色勾勒。来自 <https://kids.strw.leidenuniv.nl/DR4/releasenotes.php>。下图: KiDS 南天区的质量图。高密度区域为黄色, 低密度区域为深色。放大区域内的灰色方框表示单张 1 deg^2 KiDS 图像的大小, 并画出满月以比较尺度。KiDS 图由 1000 多张图像组成。来自 https://kids.strw.leidenuniv.nl/pr_jul2020.php。

主镜直径为 2.61 米的 VLT 巡天望远镜和 2.68 亿像素的 OmegaCAM 相机, 视场为 1 deg^2 。完整巡天将覆盖 1350 平方度, 分为赤道天区和南天区, 见图 41。2019 年的第四次数据发布覆盖 1006 平方度, 包含 2100 多万个可用于透镜分析的星系, 即具有可靠形状测量和测光红移的星系。由于 KiDS 论文太多 (截至今天, 即 2023 年 5 月 4 日, <https://kids.strw.leidenuniv.nl/papers.php> 列出了 220 篇), 而又没有清楚的综述性论文, 很难全面把握 KiDS 的结果。KiDS 质量图见图 41。暗能量巡天

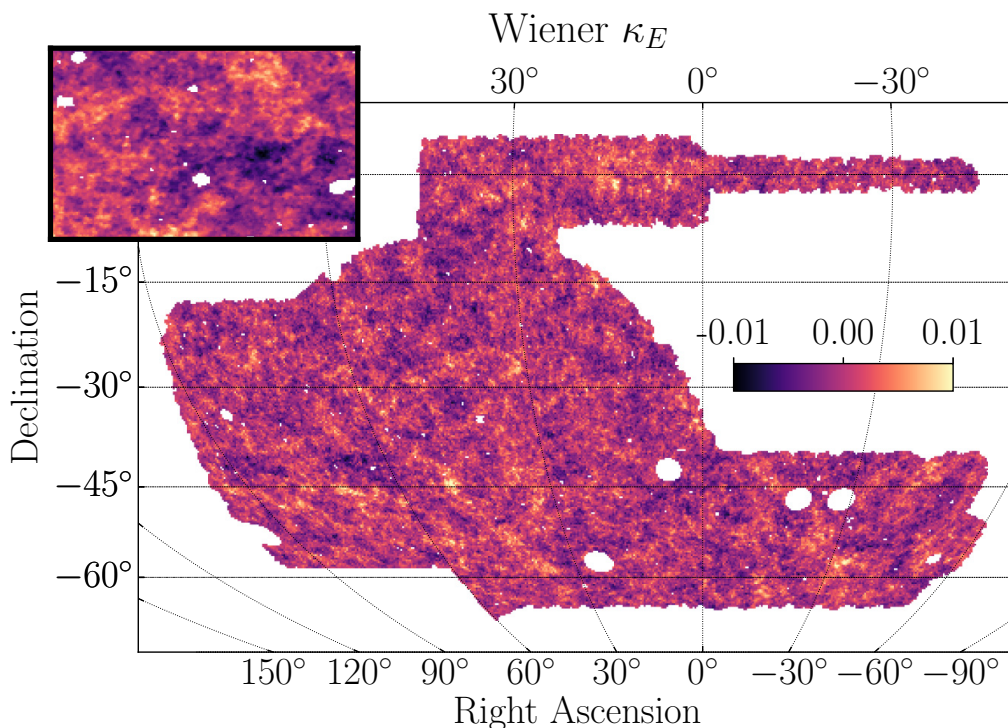


图 42: DES 三年数据的质量图, 来自文献 [59]。该文用 4 种不同的质量图重建方法给出了 4 个版本 (其图 5); 这里展示的是维纳滤波方法的结果。图中量为会聚 κ_E 。由于 $|\kappa_E| \ll 1$, 我们处于星系图像畸变很小的弱透镜范围。插图放大了以赤经 70° 、赤纬 -40° 为中心的 $15^\circ \times 10^\circ$ 区域。

(Dark Energy Survey, DES) 是一项为期六年的巡天, 于 2013 年 8 月 31 日开始, 2019 年 1 月 9 日结束数据采集, 覆盖南天的 5000 平方度, 观测了 3 亿多个星系 (<https://www.darkenergysurvey.org/>)。它使用智利一台 4 米望远镜上的 5.7 亿像素数码相机。目前已发布三年结果; 三年数据已经覆盖完整的 5000 平方度巡天天区。DES 质量图见图 42。

12.2 斯隆数字巡天

斯隆数字巡天 (Sloan Digital Sky Survey, SDSS) 是从 2000 年开始、目前仍在进行的星系巡天, 使用新墨西哥州一台专用的 2.5 米宽视场望远镜。按时间分为五个阶段: I (2000–2005)、II (2005–2008)、III (2008–2014)、IV (2014–2020), 以及 2020 年开始的 V。每个阶段都有多次数据发布 (data release, DR)。SDSS-IV 的最终数据发布 DR17 在 2021 年进行 [60]。本节主要参考 SDSS 主页 (<https://www.sdss.org/>) 和维基百科 (https://en.wikipedia.org/wiki/Sloan_Digital_Sky_Survey)。SDSS 发表了极多论文, 很难对其形成全面认识。

最初, 直到 2009 年, SDSS 同时以测光和光谱模式运行。测光模式在从近紫外、经过可见光到近红外的 5 个不同通带 (波长范围) 成像, 分别称为 u (近紫外)、 g (绿色)、 r (红色)、 i 和 z (后两者均为近红外)。DR8 (2009) 是最后一次测光数据发布。图像覆盖 14555 平方度 (全天的 35%),

包含近十亿个天体。此后，SDSS 专注于光谱。对宇宙学来说，光谱的主要用途是确定星系红移，作为距离的替代指标。因此，宇宙学光谱巡天也称为红移巡天，可由此获得星系的三维分布。

12.2.1 SDSS-I

SDSS-I 对 8000 多平方度的天空成像，并测量了从其中 5700 平方度图像中选出的星系和类星体的光谱。后续阶段包含多个子巡天，其中有些与宇宙学无关，而是关注银河系和近邻星系。下面只介绍与宇宙学有关的子巡天。

12.2.2 SDSS-II

斯隆传承巡天 (Sloan Legacy Survey): 这一红移巡天包含 80 多万个星系和 10 万个类星体的光谱，覆盖 7500 多平方度。(大部分数据来自 SDSS-I。)

斯隆超新星巡天 (Sloan Supernova Survey): 专注于 Ia 型超新星。它们是可标准化的烛光，因此可以用于确定红移-距离关系。2014 年的最终发布包含 4607 个已确认或可能的超新星。

12.2.3 SDSS-III

重子振荡光谱巡天 (Baryon Oscillation Spectroscopic Survey, BOSS): 这一红移巡天旨在测量不同红移处的重子声学振荡 (BAO) 尺度，这是一把统计标准尺，可以约束宇宙的膨胀历史。它关注高红移处仍可探测的高光度天体，即亮红星系 (LRG) 和类星体。

12.2.4 SDSS-IV

扩展重子振荡光谱巡天 (extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey, eBOSS): eBOSS 是“最后一次使用斯隆望远镜，开展旨在利用 BAO 和 RSD 技术测量宇宙学参数的星系红移巡天；此后 SDSS 将转向其他令人振奋的天文学问题” [61]。文献 [61] 将从 SDSS 所有红移巡天中选出、用于 BAO 和 RSD 研究的星系与类星体分为 6 个样本：

- **主星系样本 (Main Galaxy Sample, MGS):** 来自 SDSS-I 和 II，在连续的 6813 平方度天区内选出 $0.07 < z < 0.2$ 、 $M < -21.2$ 的 63163 个星系，以大致均匀地探测整个红移范围。
- **BOSS DR12 星系:** 9376 平方度内 $0.2 < z < 0.75$ 的 1372737 个星系。
- **eBOSS 亮红星系 (LRG):** 同一 9376 平方度天区内 $0.6 < z < 1.0$ 的 377458 个 LRG。
- **eBOSS 发射线星系 (ELG):** 1170 平方度内 $0.6 < z < 1.1$ 的 173736 个 ELG。
- **eBOSS 类星体:** 4699 平方度内 $0.8 < z < 2.2$ 的 343708 个类星体。
- **莱曼 α 森林样本:** 来自 BOSS 和 eBOSS、 $2.1 < z < 3.5$ 的 210005 个类星体；它们的光谱适合利用中性氢对类星体光的莱曼 α 吸收，分析通向类星体的视线上的中性氢涨落。

12.3 Euclid

Euclid 是欧洲空间局 (European Space Agency, ESA) 的宽视场空间望远镜 (<https://www.euclid-ec.org/>)。它是 ESA 的中型任务，是 ESA 空间科学任务“宇宙愿景 2015–2025”规划周期中的 M2，见表 6。计划于 2023 年 7 月由 SpaceX 猎鹰 9 号火箭从佛罗里达州卡纳维拉尔角发射。



图 43: 左: Euclid 艺术示意图。图片来源: ESA/ATG medialab (航天器); NASA、ESA、CXC、C. Ma、H. Ebeling、E. Barrett (夏威夷大学 / IfA) 等及 STScI (背景)。右: 2023 年 3 月, 运往发射场之前, Euclid 位于 Thales Alenia Space 的洁净室中。Euclid 高 4.7 米、直径 3.7 米、质量 2 吨。图片来源: Thales Alenia Space。

Euclid 将在日地系统第二拉格朗日点 (L2) 周围的轨道运行, 位于背向太阳的方向, 距地球 150 万千米。

Euclid 配备直径 1.2 米的同轴三反射镜 Korsch 望远镜, 以及分别用于可见光和近红外的两台仪器。望远镜中的分色片将可见光与红外光分开, 使两台仪器能够同时观测同一视场。

可见光仪器 (VIS) 有覆盖 550–900 nm 的宽带滤光片, 配备 6×6 阵列的 4096×4132 像素电荷耦合器件 (Charge Coupled Devices, CCD), 视场为 0.57 deg^2 。像素大小对应 0.1×0.1 角秒 (https://www.euclid-ec.org/?page_id=2485)。见图 44。

近红外光谱仪与测光仪 (Near Infrared Spectrometer and Photometer, NISP) 同时配有测光通道和无缝光谱仪: 前者在三个近红外波段 Y (900–1192 nm)、 J (1192–1544 nm) 和 H (1544–2000 nm) 成像, 后者配有四个棱栅 (grism), 即三个“红”棱栅 (1250–1850 nm) 和一个“蓝”棱栅 (920–1250 nm)。NISP 配备 4×4 阵列的 2040×2040 红外探测器 (H2RG, 即 Hawaii-2RG 集成电路, 而非 CCD), 覆盖 0.53 deg^2 视场, 像素大小对应 0.3×0.3 角秒。“无缝”意味着光谱仪会将视场内每个天体的像展开成光谱。如果不同天体沿光谱展开方向处于同一直线上, 它们的光谱就会部分重叠。三个不同的红棱栅具有不同取向, 因而使用一个棱栅时发生的重叠, 在使用另一个时就不会发生 (https://www.euclid-ec.org/?page_id=2490)。每个视场的曝光时间将在三个成像波段和四个棱栅之间分配, 见图 44。ESA 提供航天器和望远镜, 已与 SpaceX 签署发射合同, 并负责航天器运行及向地球传输数据。由 17 个国家 (奥地利、比利时、加拿大、丹麦、芬兰、法国、德国、意大利、日本、荷兰、挪威、葡萄牙、罗马尼亚、西班牙、瑞士、英国和美国) 组成的 Euclid 联盟 (Euclid Consortium, EC) 提供 NISP 和 VIS 仪器, 以及由九个国家科学数据中心 (SDC-CH、SDC-DE、SDC-ES、SDC-FI、SDC-FR、SDC-IT、SDC-NL、SDC-UK 和 SDC-US) 组成的科学

	任务	发射时间	科学目标
M1	Solar Orbiter	2020 年 2 月 10 日	太阳
L1	JUICE	2023 年 4 月 14 日	木星卫星
M2	Euclid	2023 年 7 月	宇宙学
M3	PLATO	2026 年	系外行星
M4	ARIEL	2029 年	系外行星
M5	EnVision	?	金星轨道器
L2	ATHENA	2035 年	X 射线
L3	LISA	2037 年	引力波

表 6: 当前 ESA 科学计划中的 L 和 M 任务。大型 (L) 任务的 ESA 经费约为十亿欧元, 中型 (M) 任务约为五亿欧元。此外还有小型 (S)、快速 (F) 任务, 以及机会任务 (其他空间机构已批准、ESA 可以参与的任务)。部分信息来自 <https://sci.esa.int/web/home/-/51459-missions>。

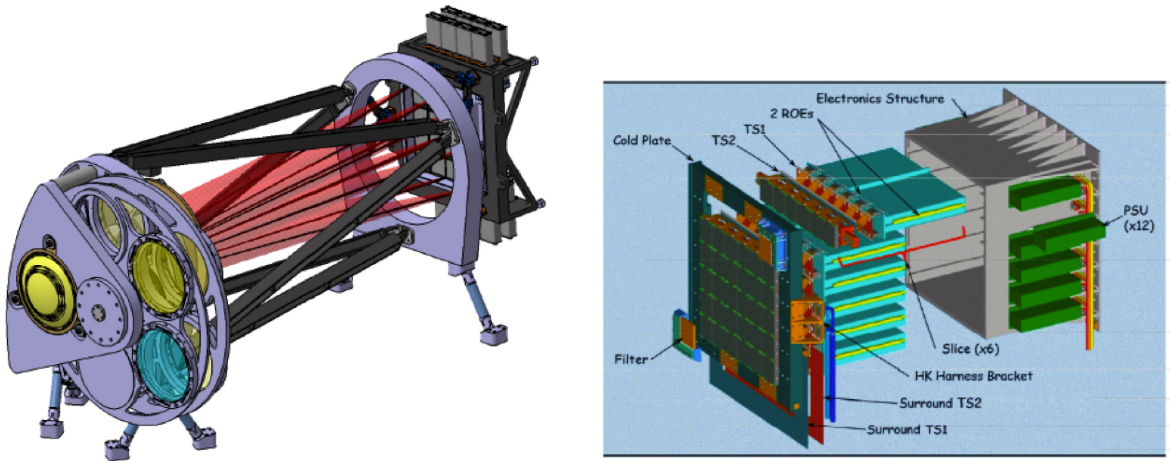


图 44: 左: NISP。右: VIS。来自文献 [20]。

地面系统，并负责 Euclid 数据分析。Euclid 任务的 ESA 经费超过七亿欧元，EC 经费约为其一半，因此这是一个超过十亿欧元的项目。Euclid 的主要目的是开展 Euclid 广域巡天，覆盖约 15000 平

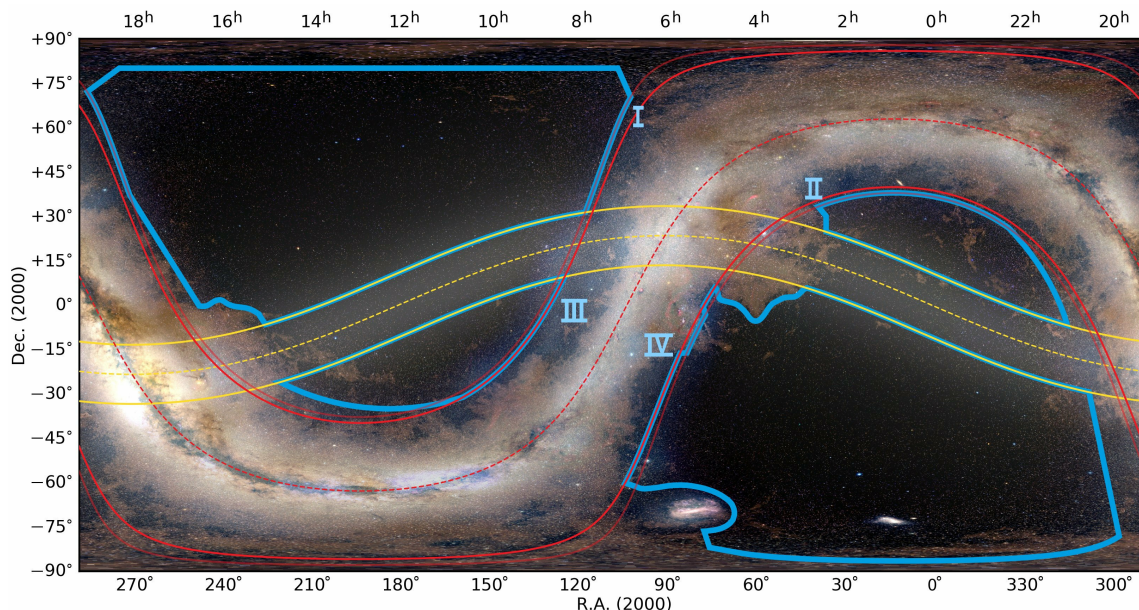


图 45: Euclid 感兴趣区域。银河与黄道带将它分为四块独立区域。来自文献 [62]。

方度，即超过全天的三分之一。Euclid 将以步进凝视模式 (step-and-stare) 运行，每个视场用时约 70 分钟。为填补阵列中 CCD 和探测器之间的缝隙，这段时间被分为四个略有差异的“抖动”指向。广域巡天天区从一个 17000 平方度的“感兴趣区域” (region of interest, RoI) 中选取，避开银道面和黄道带，以便清楚地观测河外宇宙，见图 45。

Euclid 广域巡天既是红移巡天，也是弱透镜巡天。红移巡天基于 NISP 光谱，预计可获得 3000 万个星系的精确红移。广域巡天只使用红棱栅。最重要的谱线是 $H\alpha$ ，即巴耳末系的第一条谱线，对应氢原子电子从 $n = 3$ 到 $n = 2$ 能级的跃迁。 $H\alpha$ 波长为 656 nm，因此在红移 $z = 0.9-1.8$ 时落入红棱栅的 1250–1850 nm 范围。弱透镜巡天从清晰的 VIS 图像中确定精确的星系形状，并结合 NISP 三个红外波段的图像与地面另外五个波段的观测来估计测光红移。弱透镜巡天的极限星等为 24.5，预计包含 15 亿个星系。

将望远镜送到 L2 比从地面观测昂贵得多。进入空间有以下几个原因：

1. L2 周围轨道上的观测条件比地面稳定得多，这对于获得无偏的统计测量很重要。
2. 从 L2 可以看到整个天空。同样，整个巡天使用相同望远镜和仪器，对得到正确的统计结果很重要。
3. 没有大气，可以获得更清晰、无畸变的图像，这对剪切（弱透镜）测量至关重要。
4. 大气会吸收红外辐射。虽然部分红外辐射可以穿过大气，但吸收依赖波长，会扭曲红移巡天的统计量，以及测光红移所需的红外颜色。

这些原因对于图像形状和红外观测更为关键，因此 Euclid 被设计为只完成巡天的这些部分。对于可见光颜色，进入空间的优势没有那么大，而在地面完成可见波段的测光观测要经济得多。除了 NISP 的三个近红外波段，Euclid 还依赖五个可见波段的地面观测来确定测光红移，见下面的 LSST 和北天巡天小节。

SDSS 等地面红移巡天已获得关于 $z \lesssim 1$ 处大尺度结构的丰富信息。宇宙膨胀似乎在 $z = 1$ 附近开始加速；为研究暗能量的影响，需要对这一红移两侧进行测量，直至 $z \sim 2$ 。在 $z \gtrsim 2$ 时，预计暗能量的影响可以忽略。因此，Euclid 红移巡天聚焦的 $z = 0.9\text{--}1.8$ 区间，恰好是最需要补充信息的区域。

位于广域巡天天区内、共覆盖 40 平方度的三个 Euclid 深场，将比广域巡天观测深两个星等，并且也使用蓝棱栅。此外，还有定标场和辅助场。这些天区用于标定 Euclid 仪器和分析软件，因此是保证广域巡天质量所必需的；它们也用于开展自身额外的科学研究，深场尤其如此。Euclid 约需

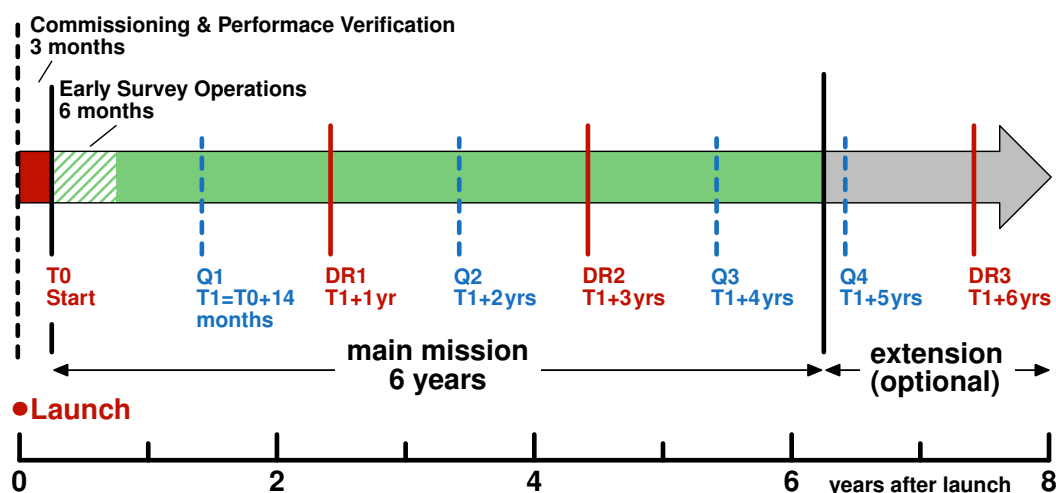


图 46: Euclid 时间表。来自文献 [62]。

一个月到达 L2 周围轨道。它采用李萨如轨道 (Lissajous orbit)⁵⁹，在朝向或背离地球的方向上不稳定，因此需要每月进行一次轨道修正 [62]。经过一个月的在轨调试和两个月的性能验证后，巡天将在发射三个月后开始。计划有三次数据发布：DR1 对应第一年的数据 (2500 平方度)，DR2 对应三年 (7500 平方度)，DR3 对应完整六年 (15000 平方度)。数据采集后、发布前有 14 个月的专有权，期间只有 EC 成员 (约 2000 名科学家) 能访问数据。此外，还会针对小片天区进行快速数据发布。见图 46。组成 Euclid 巡天的指向序列需要精心规划，才能最优地利用可用时间。必须满足许多约束，例如，为保持热环境稳定，指向与太阳之间的夹角不能变化太大：这一夹角将保持在 87° 到 110° 之间，因此在一年中的任何时刻，只能观测宽度为 23° 的条带状天区。最终巡天序列尚未确定，但图 47 展示的 Euclid 参考巡天 RSD 2021A (RSD = reference survey definition, 参考巡天定义) 满足这些约束，并且经过优化。前两年观测离银河最远、河外可见性最好的区域；在六年巡天的最后两年，观测 RoI 中两个较小的“岛状”区域。

图 48 示意了 Euclid 数据分析流程。Euclid 数据从空间传到地面站，再由地面站送往位于达姆施塔特欧洲空间操作中心 (European Space Operations Centre, ESOC) 的任务操作中心 (Mission Operations Center, MOC)。随后，数据传到位于马德里附近欧洲空间天文中心 (European Space Astronomy Centre, ESAC) 的科学操作中心 (Science Operations Center, SOC)，在那里进行最低级别 (Level-1) 的数据分析：遥测检查与处理、实时评估“工程状态”数据 (航天器和仪器的状态)，以及解包和解压缩。九个 Euclid SDC 从 SOC 接收数据。IOT 是仪器操作团队 (Instrument Operation Teams)，提供仪器特性信息。数据产品通过 Euclid 任务档案库 (Euclid Mission Archive, EMA) 分布在各 SDC 中。VIS、NIR 和 SIR 指对仪器原始图像进行归算，得到经过定标的图像。归算包括减去“暗场” (darks)，即仪器没有接收到光时的输出；用“平场” (flats)，即均匀照明下的仪器

⁵⁹在拉格朗日点 L1 和 L2 周围使用的轨道有两种：李萨如轨道和晕轨道。晕轨道是周期性的，李萨如轨道则不是。

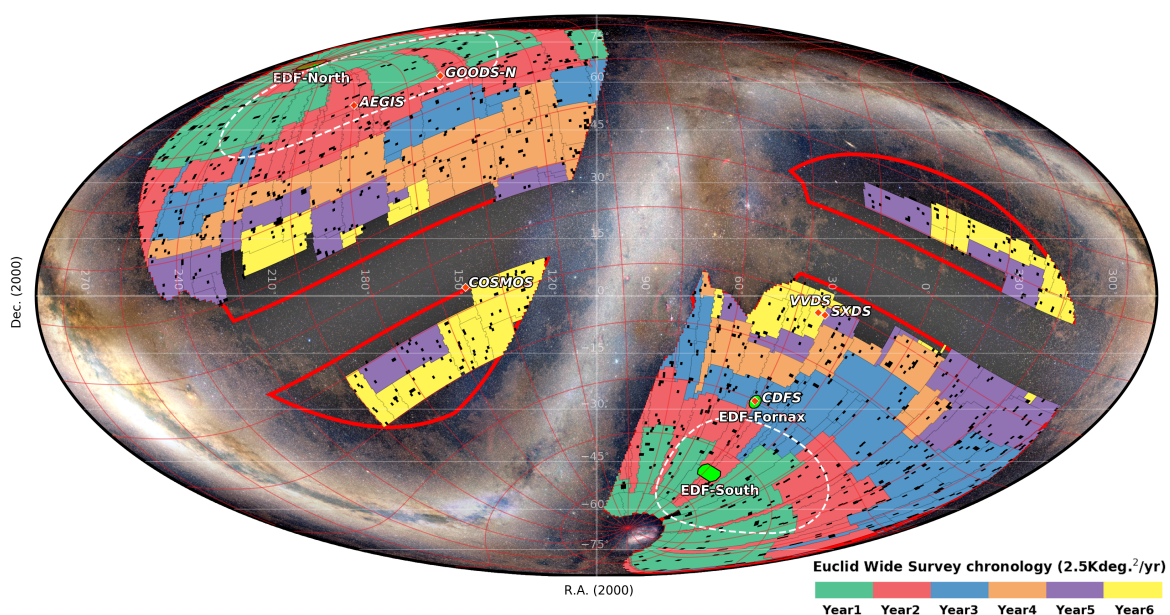


图 47: Euclid 参考巡天 RSD 2021A。白色为天球坐标, 红色为黄道坐标。不同颜色表示六年中每一年广域巡天覆盖的天区。红线勾勒 RoI; 白色虚线勾勒河外可见性最好的银极区。参考巡天覆盖 14514 平方度。巡天中的小孔洞源于“致盲恒星”: 它们非常明亮, 会降低视场中大部分区域的质量。这样的孔洞共有 809 个, 总面积为 635 平方度。三个 Euclid 深场为浅绿色; 六个辅助场以红色菱形标出, 定标场未标出。来自文献 [62]。

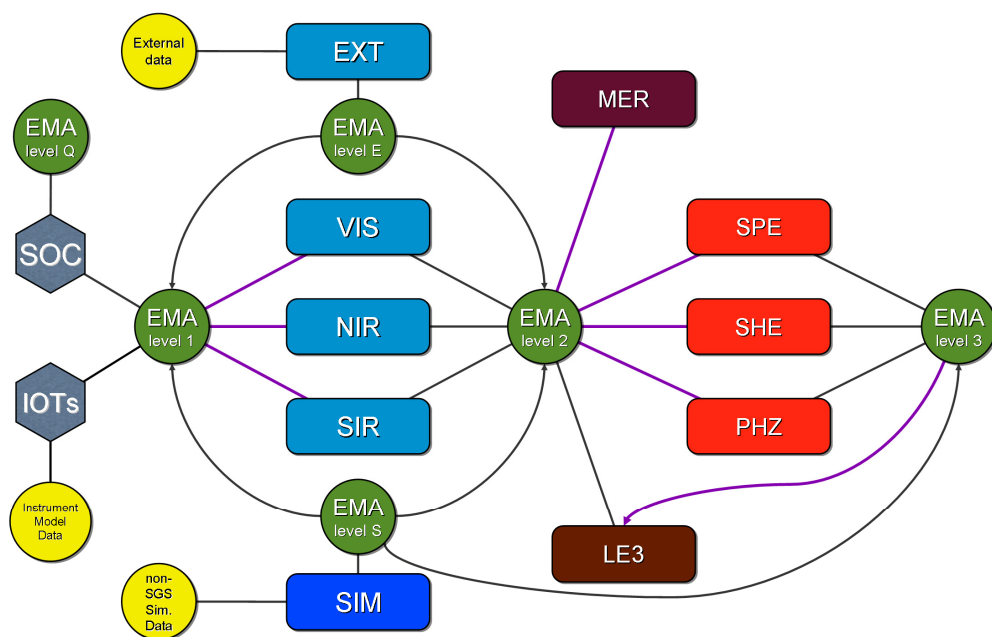


图 48: Euclid 数据处理流程示意图。说明见正文。来自文献 [20]。

图像进行缩放；以及去除宇宙线轨迹等伪迹。EXT 指处理从地面巡天获得的外部数据，必须将它们“Euclid 化”，转为与 Euclid 数据相同的形式。MER 指将 Euclid 与外部数据合并，生成叠加图像和源星表，汇集不同仪器和巡天的信息。

SPE 指从 SIR 生成的已定标光谱图像的光谱中提取红移。SHE 指从 VIS 生成的已定标图像中确定星系图像的形状。这一步必须校正望远镜光学系统造成的额外畸变，需要知道点扩散函数 (point spread function, PSF)，即点源在 VIS CCD 不同部位成像的样子。PHZ 使用 NIR 和外部数据提供的不同波段图像来估计测光红移。SIM 提供模拟数据，用于测试、验证和检验数据处理流程是否达标，也用于标定 Euclid 数据产品和估计其误差。SPE、SHE 和 PHZ 输出最终星系表，包含位置、星等、红移和形状。

LE3 指数据分析的最后一级“Level-3”，在这一级从上述星表计算最终的宇宙学产品，包括质量图、两点和三点相关函数、功率谱和双谱等各种统计量，以及它们的协方差矩阵。

12.4 地面巡天

12.4.1 LSST

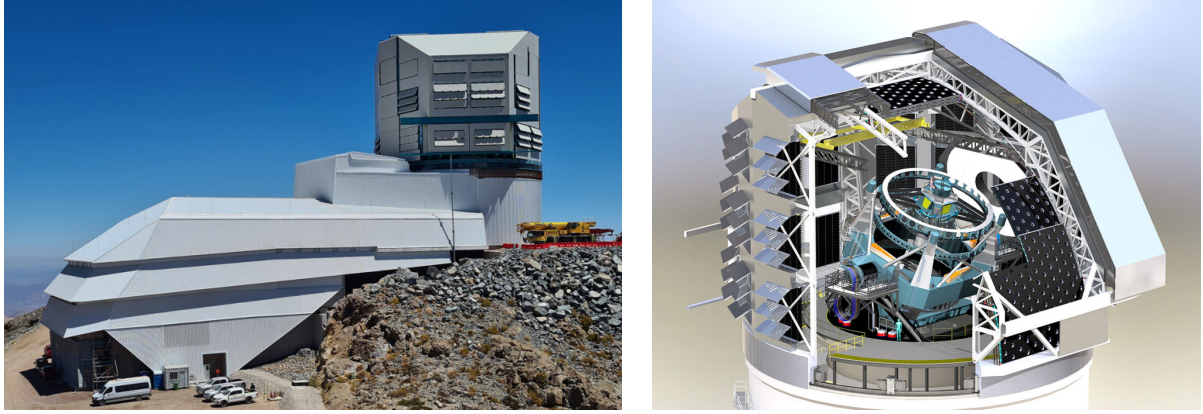


图 49: 位于智利北部帕穹山顶的 Vera C. Rubin 天文台，坐标为南纬 $30^{\circ}15'$ 、西经 $70^{\circ}45'$ ，海拔 2647 米。来自 <https://rubinobservatory.org/slideshows/eyes-on-asteroids>。

在规划阶段，LSST 代表 Large Synoptic Survey Telescope，即大型综合巡天望远镜。如今，天文台已命名为 Vera C. Rubin 天文台 [63]，望远镜则命名为 Simonyi 巡天望远镜，见图 49。原来的缩写现改指时空传承巡天 (Legacy Survey of Space and Time)，即利用该天文台的 8.4 米望远镜和 32 亿像素相机（迄今制造的最大数码相机）开展十年巡天，使用六个不同的光学滤光片 u 、 g 、 r 、 i 、 z 和 y ，覆盖 320–1050 nm 波长，见图 50 和文献 [64]。望远镜的设计目标是短时间内反复观测整个可见天空 (synoptic 意为“看遍全部”)。视场为 9.6 deg^2 ，像素大小为 0.2 角秒；望远镜可在不到五秒内改变指向。它的光学扩展量 (étendue)，即集光面积与视场的乘积，为 $A\Omega = 319 \text{ m}^2 \text{ deg}^2$ ，将显著大于其他所有光学望远镜。每隔 3–4 个夜晚，就会观测一遍整个可见天空。这使该巡天极适合发现超新星、小行星以及其他亮度或位置变化的暂现天体。预计 Rubin 天文台将发现此前已知数量 10–100 倍的太阳系天体，并对可能撞击地球的天体提供预警。预计首次见光时间为 2024 年 8 月。

根据基准巡天策略 [65]，85% 的观测时间用于主巡天 (WFD = Wide, Fast, Deep，即宽、快、深)，均匀覆盖 18000 平方度。赤纬范围为 $\delta = -65^{\circ}$ 至 $+5^{\circ}$ （这一范围内天空总面积为 20500 平方度，但沿银道面的一片区域不纳入 WFD）。每个视场连续进行两次 15 秒曝光，这一对曝光称为一次访问 (visit)；需要两次观测，是为了识别并去除图像中的宇宙线轨迹。平均每晚访问 816 次，

十年共 3026 个观测夜。主巡天有 2293 个视场。同一视场每隔 3–4 个夜晚观测一次，因此在十年 LSST 期间平均访问 910 次 (u 滤光片 62 次、 g 88 次、 r 199 次、 i 201 次、 z 180 次、 y 180 次)。尽可能对同一视场安排相隔 15–60 分钟的一对访问，以帮助捕捉运动的太阳系天体 [64]。随着重复观测的叠加，天空图像逐渐加深，极限星等从单张图像的 (23.14, 24.47, 24.16, 23.40, 22.23, 21.57) 提升至十年后完整叠加图像的 (25.4, 27.0, 27.1, 26.4, 25.2, 24.4)。⁶⁰ 约 10–20% 的观测时间用于其他

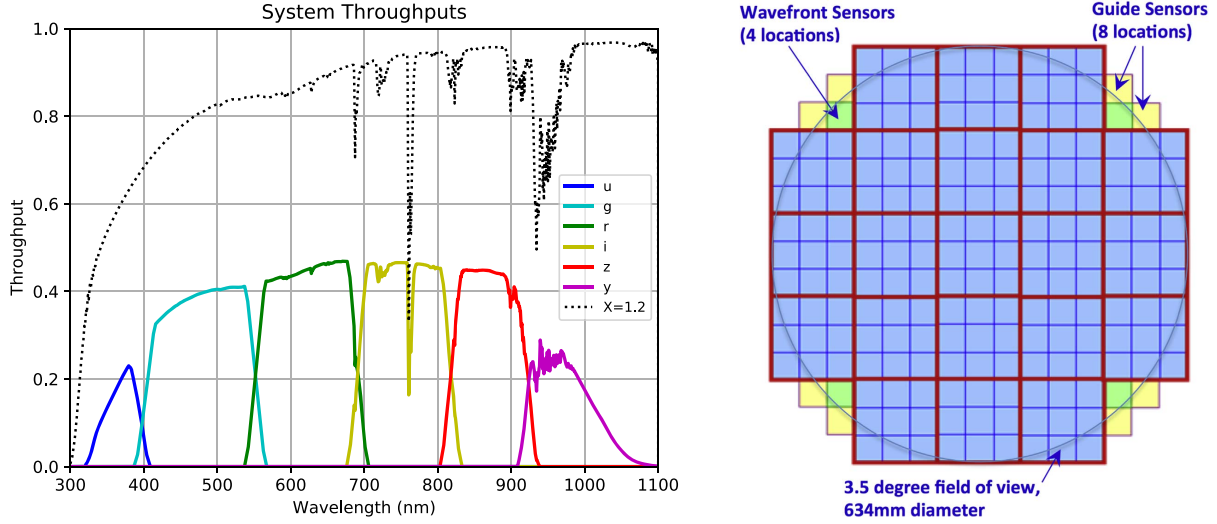


图 50: 左: LSST 通带。点线为大气透过率。右: LSST 相机的焦平面阵列, 每个小方格是一个 $4K \times 4K$ 像素传感器。来自文献 [64]。

项目，例如“深钻场” (deep drilling fields, 即对单一指向进行长序列观测)。预计 LSST 将观测 200 亿个星系、数百万个 Ia 型超新星 [64] 和 170 亿颗恒星，并确定 600 万个太阳系天体的轨道 (<https://www.lsst.org/scientists/keynumbers>)。深钻场将给出数万个超新星采样充分的光变曲线，其红移分布在 $z \sim 0.7$ 附近达到峰值，并延伸到 $z > 1$ [64]。

⁶⁰这些数字来自文献 [65]，可能还会变化。设计指标为 18000 平方度的主巡天天区、每个视场访问 825 次 (各滤光片分别为 56、80、184、184、160 和 160 次)。 <https://www.lsst.org/scientists/keynumbers> 给出的单次曝光极限星等为 (23.9, 25.0, 24.7, 24.0, 23.3, 22.1)，十年后为 (26.1, 27.4, 27.5, 26.8, 26.1, 24.9)。

Benchmark survey baseline2018a

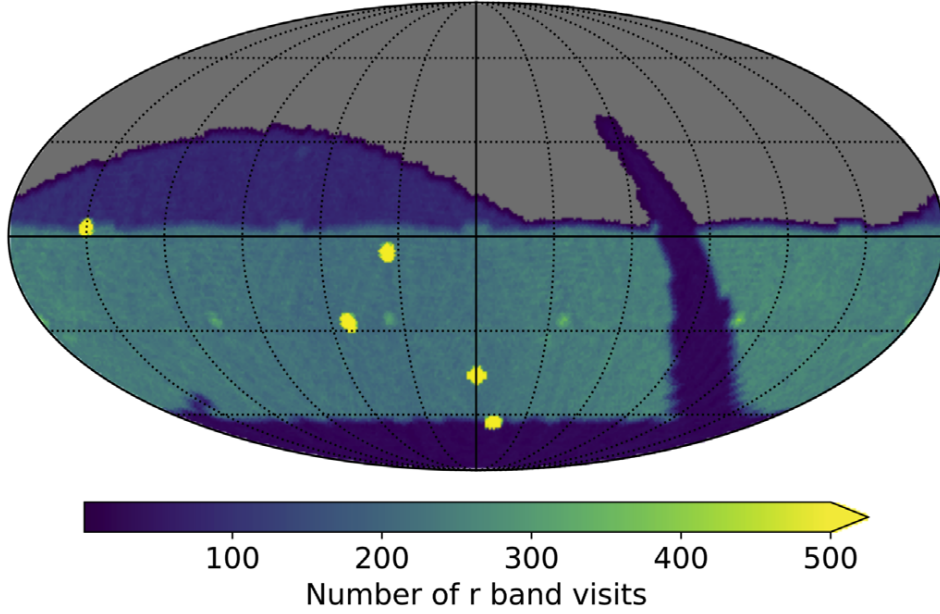


图 51: LSST 基准巡天。色标表示使用 r 滤光片的访问次数；主巡天天区约为 200 次。有三项访问次数较少的巡天，覆盖南黄道半球和南赤道半球的其余部分。左上方的“北黄道区域”用于提高太阳系天体样本的完备性。右侧弧状区域是主巡天排除的银道面区域，因为如此深的曝光下，高恒星密度会导致天体混淆。黄色区域为深钻场， r 波段访问 2500–4500 次。来自文献 [64]。

12.4.2 北天巡天

为确定测光红移，Euclid 需要用可见光波段图像补充其三个近红外成像波段，尤其是 $griz$ 波段至关重要 [20, 62]。这些图像由地面巡天获取更为经济。对于南天，Euclid 初期可以使用 DES 数据，随后使用 LSST 数据。北天没有波段数量足够多的同等巡天，因此将使用多个不同巡天的数据。Euclid 正与 LSST 协商，将其向北扩展到 $\delta = +30^\circ$ 。更北的天区有几个从北半球开展的巡天。其中一些从夏威夷无法有效观测 $\delta = 80^\circ$ 以北，因此 Euclid 巡天也将以此作为北界 [62]。

夏威夷的三台宽视场望远镜联合开展紫外近红外光学北天巡天 (Ultraviolet Near Infrared Optical Northern Survey, UNIONS; <https://www.skysurvey.cc>)：位于莫纳克亚山 (北纬 $19^\circ 50'$ 、西经 $155^\circ 29'$) 的 CFHT 和 Subaru，以及位于哈雷阿卡拉山 (北纬 $20^\circ 42'$ 、西经 $156^\circ 15'$) 的 Pan-STARRS。CFHT 提供 u 和 r 波段，Pan-STARRS 提供 i 波段，Subaru 提供 g 和 z 波段；覆盖范围为 $30^\circ \leq \delta \leq 80^\circ$ ，且离银道面超过 25° ，面积为 4861 平方度。在 u 波段，LSST 不会巡测 $\delta = 12^\circ$ 以北，因为所需的低望远镜仰角会带来很大的大气质量。因此，UNIONS 计划将 u 波段巡天向南延伸至 $\delta = 18^\circ$ 或 12° 。UNIONS 最初的动机之一是为 Euclid 提供地面数据，但它是独立于 Euclid 的项目，也有自己的目标。

泛星计划 (Panoramic Survey Telescope and Rapid Response System, Pan-STARRS) [66] 在持续监测天空、探测运动或变光天体这一点上，类似于北天规模较小的 LSST。它使用位于夏威夷毛伊岛哈雷阿卡拉天文台的两台 1.8 米望远镜，配备十亿像素级相机 (1400 Mpix，即 14 亿像素)。它从 2008 年开始运行，当时只有一台望远镜，主要由 NASA 近地天体 (Near Earth Object, NEO) 观测计划资助，因此主要目的是搜索未来可能撞击地球的潜在危险小行星。2017 年，Pan-STARRS 发现了首个已知造访太阳系的星际天体“奥陌陌” (‘Oumuamua)。Euclid 指望 Pan-STARRS 提供 $\delta = +30^\circ$ 以北的 i 波段数据。

加法成像巡天 (Canada-France Imaging Survey, CFIS; <https://www.cfht.hawaii.edu/Science/CFIS/>) 使用莫纳克亚山上 3.6 米的加法夏望远镜 (CFHT), 配备 3.8 亿像素的 MegaCam 相机, 提供 u 和 r 波段。

昴星望远镜 (Subaru; <https://subarutelescope.org/en/>) 是夏威夷莫纳克亚山上的 8.2 米望远镜, 由日本国立天文台运行。它将使用 8.7 亿像素、视场直径 1.5° 的 Hyper Suprime-Cam (HSC) 开展 WISHES (Wide Imaging with Subaru HSC of the Euclid Sky) 巡天, 以提供 z 波段。在需要从地面获取的波段中, z 波段要求最高, 因此需要 8 米级望远镜。Waterloo Hawaii IfA G-band Survey (WHIGS) 利用 UNIONS 联合负责人通过加拿大和夏威夷大学获得的 Subaru HSC 观测时间, 提供 r 波段。

位于西班牙特鲁埃尔、北纬 $40^\circ 02'$ 、西经 $1^\circ 01'$ 的哈瓦兰布雷巡天望远镜 (Javalambre Survey Telescope, JST250; <https://oajweb.cefca.es/telescopes/jst250>), 主镜直径为 2.55 米, 将使用视场 4.3 deg^2 的哈瓦兰布雷全景相机 (JPCam), 开展哈瓦兰布雷-Euclid 深成像 g 波段巡天 (JEDIS- g)。在为 Euclid 提供北天 g 波段数据的讨论中, Subaru 和 JEDIS 都被提及。根据文献 [62], Subaru 的 g 波段项目于 2019 年启动, 以补充西班牙方面的工作。

12.4.3 DESI

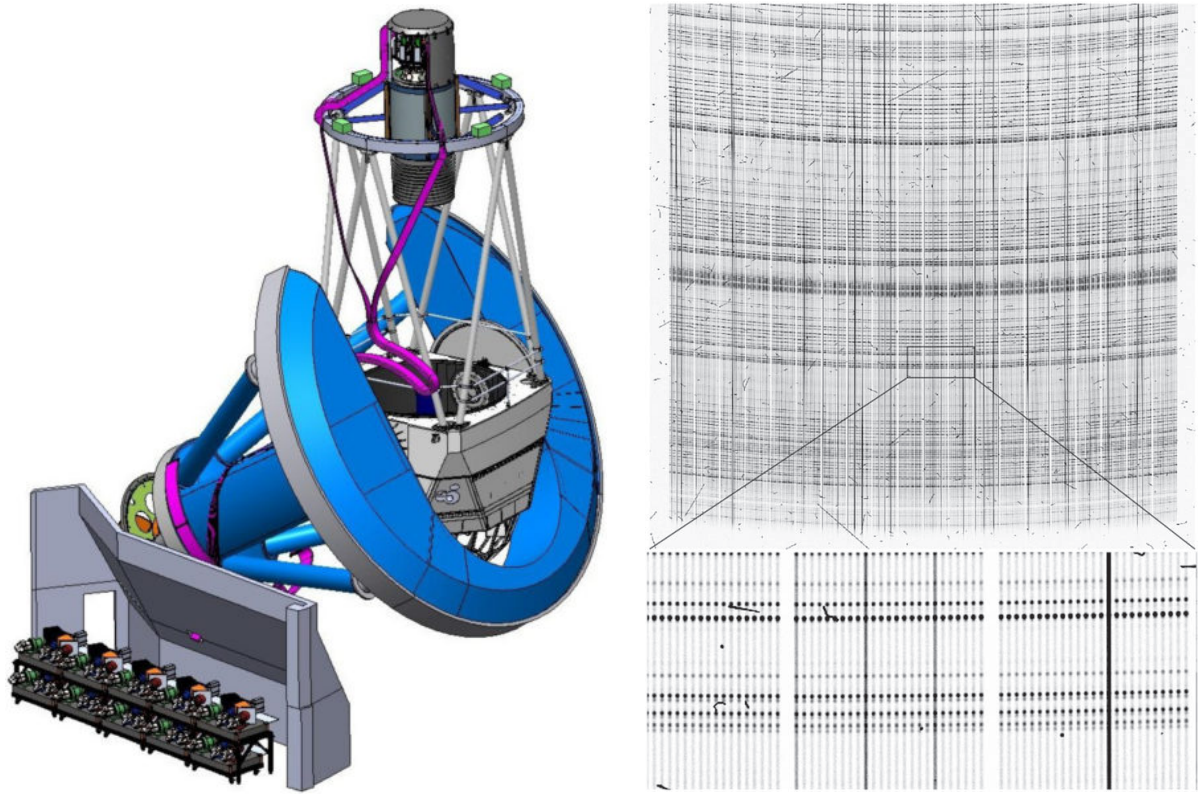


图 52: 左: Mayall 望远镜与 DESI。带有光纤定位器的焦平面位于顶部。连接左下方光谱仪的光纤以紫色表示。右: DESI 光谱仪的一张近红外 CCD 图像, 500 条光谱表现为平行的竖线。水平方向的弯曲线是大气产生的天光谱线, 还可以看到宇宙线轨迹。来自文献 [68]。

暗能量光谱仪 (Dark Energy Spectroscopic Instrument, DESI) [67, 68] 是安装在亚利桑那州基特峰 4 米 Mayall 望远镜上的多目标光谱系统, 视场为 8.0 deg^2 。焦平面分为 10 个花瓣状区域, 每个配备 500 个光纤定位机器人。每次曝光时, 机器人将光纤定位到选定、需要获取光谱的星系上。

各花瓣的光纤束通向 10 台光谱仪。每台光谱仪有三个支路，分别对应蓝光（360–593 nm）、红光（560–772 nm）和近红外（747–980 nm），各配有一块 CCD，蓝光为 4096×4096 像素，红光与近红外为 4114×4124 像素。光纤被排列成使 500 条光谱在 CCD 上形成平行线，见图 52。因此，DESI 可以同时获取 5000 条光谱。DESI 巡天 (<https://www.desi.lbl.gov/the-desi-survey/>) 是为

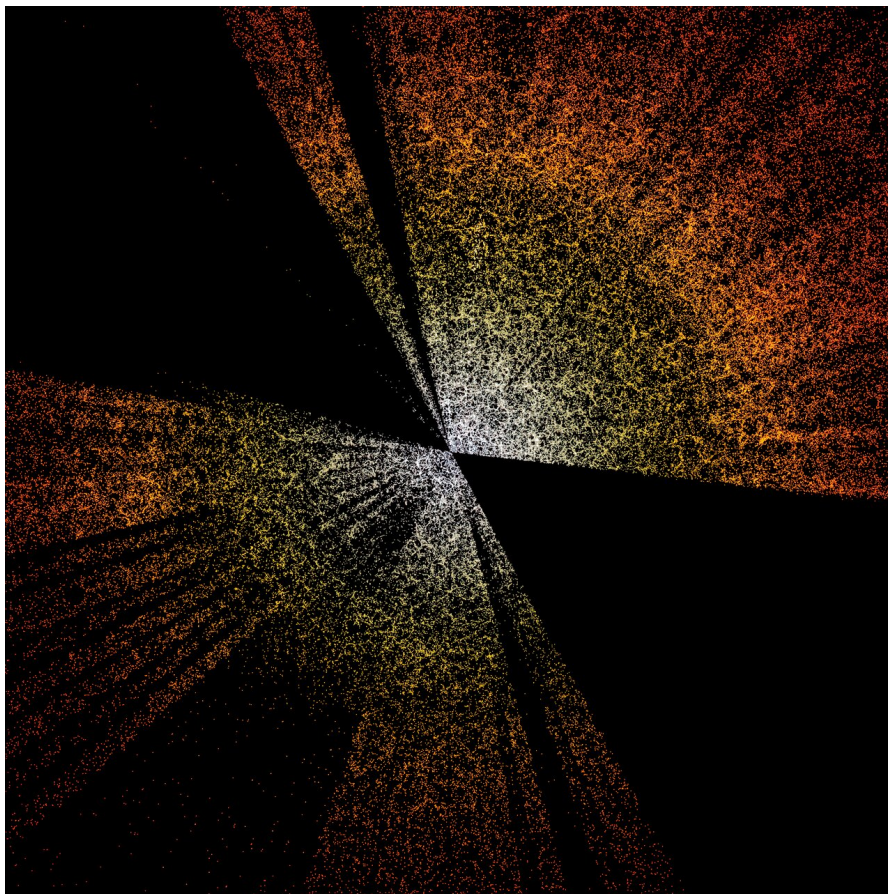


图 53: 一张穿过宇宙的切片，包含 DESI 运行最初几个月观测到的 40 万个星系。最远的星系位于 100 亿光年之外。图片来源: D. Schlegel / 伯克利实验室，使用 DESI 数据。致谢: M. Zamani (NSF 的 NOIRLab)。

期五年的红移巡天，要在三分之一的天空内获取 4000 万个预选星系的光谱，数量是 SDSS 的十倍。巡天基于四类星系：

1. 远至 $z = 0.4$ 、极限星等为 20 的明亮星系；
2. 远至 $z = 1.0$ 的亮红星系 (LRG)；
3. 发射线星系 (ELG)，具有 DESI 能识别的强发射线，远至 $z = 1.6$ ；
4. 类星体，DESI 可将其探测至 $z = 3.5$ 及更远处。

这是一项第四阶段暗能量巡天（见第 12.6 节），通过测量 BAO 尺度随红移的变化开展研究。

巡天从 2020 年 12 月至 2021 年 6 月的巡天验证观测开始，随后于 2021 年 6 月启动主巡天。最初的数据发布将包括巡天验证的早期数据发布，以及涵盖截至 2022 年 9 月 14 日数据的 DR1 [69]。截至 2023 年 5 月 19 日尚未发布数据，但在 2022 年 1 月已发布一张展示 40 万个星系的宣传图 (<https://noirlab.edu/public/news/noirlab2203/>)，见图 53。

12.5 Roman

美国国家科学院每十年组织一次天文学与天体物理学十年调查，为应当投资哪些重大项目提出建议。2010 年的调查 [70] 将拟送往 L2 周围轨道的宽视场红外巡天望远镜 (Wide-Field Infrared Survey Telescope, WFIRST) 列为最高优先级的空间项目。最初设计采用 1.3 米主镜，但在 2012 年，美国国家侦察局提出向 NASA 捐赠两台闲置的、主镜直径为 2.4 米的望远镜；随后决定将其中一台用于 WFIRST，见图 54。更大的望远镜意味着发射质量 (4166 kg) 几乎是 Euclid (2160 kg) 的两倍，因此曾考虑用地球同步轨道代替 L2；这也有助于适应更大望远镜所允许的更高数据率。2020 年，该任务更名为 Nancy Grace Roman 空间望远镜。现在已经决定由 SpaceX 猎鹰重型运载火箭将其送入 L2 周围的晕轨道。由于 NASA 没有足够经费同时支持两个项目，詹姆斯·韦布空间望远镜（上一轮十年调查的最高优先级空间项目）的延迟与成本超支也使 Roman 延期。随着 JWST 于 2021 年 12 月发射，Roman 此后进展迅速，预计于 2026 年末发射。计划任务期为五年，有可能再延长五年 [71]。Roman 将配备两台仪器：宽视场仪器 (Wide Field Instrument, WFI) 和日冕仪



图 54: Roman 天文台。图片来源: GSFC/SVS。

(Coronagraph Instrument)。WFI 是主要仪器，将用于覆盖十亿个星系的星系巡天，也将开展银河系内区的微引力透镜巡天，预计发现 2600 个系外行星。WFI 配备 3 亿像素相机，视场为 0.281 deg^2 (0.8×0.4 度)，拥有 8 个不同的滤光片、一个棱栅和一个棱镜 [72]。日冕仪用于获取近邻系外行星的图像和光谱。

Roman 将开展多种巡天。WFI 将执行三项“核心科学共同体巡天”：1) 用 24 个月观测时间进行高银纬广域巡天 (High Latitude Wide Area Survey)，覆盖 2000 平方度河外天空，获取不同波段的图像和光谱；2) 用 6 个月进行高银纬时域巡天 (High Latitude Time Domain Survey)，覆盖 5–20 平方度，每五天重访一次，目标是测量 Ia 型超新星光变曲线；3) 用 13 个月进行银河核球时域巡天 (Galactic Bulge Time Domain Survey)，覆盖银心附近 2 平方度，以寻找系外行星。此外，预留三个月，用日冕仪开展系外行星技术演示观测。五年标称任务期内剩余的 15 个月留给“一般天体物理巡天” (General Astrophysics Surveys)，天文学家可以提交申请。Roman 的所有观测数据都将公开，没有专有期。

高银纬广域巡天与 Euclid 巡天类似而又互补：它覆盖的天区小得多，至少为 1700 平方度，但深度更大。成像部分在近红外的 930–2000 nm 范围内采用四个不同波段 (927–1192 nm、1131–1454 nm、1380–1774 nm 和 1683–2000 nm)，将给出数亿个星系的弱透镜形状测量。光谱部分对同一天

区进行 1000–1930 nm 的无缝棱栅光谱观测。主要目标谱线是红移 $0.53 < z < 1.88$ 的 $H\alpha$ (656.3 nm), 以及远至 $z = 2.77$ 的 O-III (500.7 nm)。(巡天方案尚未完全确定; 以上是一种可能的设计。)

12.6 暗能量巡天的阶段划分

2006 年, 暗能量任务组 (Dark Energy Task Force, DETF) [73] 根据测定暗能量状态方程的精度, 将观测项目划分为不同阶段 (I–IV)。他们假定双参数状态方程

$$w(a) = w_0 + (1 - a)w_a, \quad (12.1)$$

并将 DETF 品质因子 (Figure of Merit, FoM) 定义为 w_0 – w_a 平面上包含 95% 置信范围的误差椭圆面积的倒数。因此, 粗略地说 $FoM \propto 1/(\Delta w_0 \Delta w_a)$, 其中 Δw_0 和 Δw_a 是两个参数值的不确定度。第一阶段对应 2006 年已有的认识, 第二阶段对应当时正在开展的项目, 第三和第四阶段则指未来项目。第四阶段定义为能将 FoM 相对于第二阶段提高一个数量级的项目, 第三阶段的改善则较为有限。

DETF 确定了四种主要观测技术:

1. 在星系红移巡天中测量重子声学振荡 (BAO) 尺度;
2. 测量星系团密度与分布的星系团 (CL) 巡天;
3. 利用 Ia 型超新星确定光度距离与红移关系的超新星 (SN) 巡天;
4. 测量角直径距离与红移关系, 以及结构增长率的弱透镜 (WL) 巡天。

DETF 认为, 任何一种技术单独使用都不足够, 因而需要结合不同方法和巡天。

2023 年的情况是: 第三阶段项目的观测大多已经完成, 但并非所有结果都已发表; 第四阶段项目正在启动, 见表 7。表中尚未讨论的两个第三阶段项目是 Subaru 成像与红移测量 (Subaru Measurements of Images and Redshifts, SuMIRe), 以及 Hobby–Eberly 望远镜暗能量实验 (Hobby–Eberly Telescope Dark Energy Experiment, HETDEX; <https://hetdex.org/>)。

12.7 光学扩展量

通常用集光面积 A 衡量望远镜的能力, 它与主镜或主透镜的直径平方有关。对于巡天, 视场 (field of view, FoV) 的立体角 Ω 同样重要。这两个量的乘积 $A\Omega$ 称为光学扩展量 (étendue)。如果天空亮度均匀, 望远镜单位时间收集的光量将与光学扩展量成正比。以给定极限星等巡测一定天区所需的时间, 与光学扩展量成反比。从表 8 可见, 哈勃空间望远镜若要完成 Euclid 的六年巡天, 需要超过 200 年。

项目	时间	面积 [deg ²]	数据类型	z	方法
BOSS	2008–2014	10000	opt-S	0.3–0.7 2–3.5 (Ly- α)	BAO/RSD
KiDS	2011–2010	1350	opt-I		WL/CL
DES	2013–2019	5000	opt-I		WL/CL SN/BAO
eBOSS	2014–2018	7500	opt-S	0.6–2.0 2–3.5 (Ly- α)	BAO/RSD
SuMIRE	2014–2024	1500	opt-I		WL/CL
			opt/NIR-S	0.8–2.4	BAO/RSD
HETDEX	2017–2023	450	opt-S	1.9–3.5	BAO/RSD
DESI	2021–2026	14000	opt-S	0–1.7	BAO/RSD
LSST	2025–2035	20000	opt-I		WL/CL SN/BAO
Euclid	2023–2029	15000	opt-I		WL/CL
			NIR-S	0.7–2.2	BAO/RSD
Roman	2026–2031	2200	NIR-I		WL/CL/SN
			NIR-S	1.0–3.0	BAO/RSD

表 7: 第三阶段（分隔线上方）和第四阶段（下方）巡天。时间指数据采集期；截至 2023 年 5 月，第三阶段巡天尚未发布全部数据或结果。opt = 可见光，NIR = 近红外，S = 光谱，I = 图像。红移范围 z 指星系，但 eBOSS 的 $z = 0.6$ – 2.0 范围中高红移部分为类星体；Ly- α 表示从类星体光谱吸收特征确定的结构。RSD = 红移空间畸变。复制自 Josh Frieman（芝加哥大学、费米实验室）于 2023 年 3 月 29 日在 UCLA 暗物质会议上的报告 [74]。

望远镜（仪器）	直径 [m]	A [m ²]	视场直径	Ω [deg ²]	$A\Omega$ [m ² deg ²]
Palomar Hale (WaSP)	5.1	~ 20		0.095	~ 2
Palomar Schmidt (ZTF)	1.26			47	~ 50
Pan-STARRS (1 台)	1.8		3°		
JST 250 (JPCAM)	2.55	3.89	3°	4.3	26.5
Subaru (HSC)	8.2		1.5°		
Rubin	8	33		9.6	319
Hubble (ACS/WFC)	2.4	4.0		0.0031	0.0126
Webb (NIRCam)	6.5	25.4		0.0027	0.068
Euclid	1.2	1.006		0.56	0.56
Roman (WFI)	2.4	~ 4		0.281	~ 1.1

表 8: 不同望远镜及其仪器的光学扩展量。先列地面望远镜，再列空间望远镜；每类又分为非巡天和巡天望远镜。巡天望远镜的特点是光学扩展量大。有些信息难以查找，而且对不同望远镜 / 仪器的处理可能并不一致，因为仪器视场不一定等于望远镜视场。资料常常只给出孔径直径，而不提供集光面积。非巡天望远镜通常有许多视场不同的仪器，其中任何一台都未必充分利用该望远镜可能实现的最大视场。这里未列现代地面非巡天望远镜，因为很难为它们找到具有代表性的视场。

标准译名索引

中文	English	简单释义
N 点相关函数	N -point correlation function	
Λ CDM 模型	Λ cold dark matter model (Λ CDM)	
Abel 积分方程	Abel integral equation	
Alcock–Paczynski 参数	Alcock–Paczynski parameter	
Alcock–Paczynski 效应	Alcock–Paczynski effect	
Condon–Shortley 相位约定	Condon–Shortley phase convention	
Cox 过程	Cox process	
Davis–Peebles 估计量	Davis–Peebles estimator	
Einstein–de Sitter 宇宙	Einstein–de Sitter universe	
FKP 权重	Feldman–Kaiser–Peacock weight (FKP weight)	
Friedmann 方程	Friedmann equation	
Hamilton 估计量	Hamilton estimator	
Ia 型超新星	Type Ia supernova	
Jeans 方程	Jeans equation	
Landy–Szalay 估计量	Landy–Szalay estimator	
Limber 方程	Limber’s equation	
Parseval 定理	Parseval theorem	
Plancherel 定理	Plancherel theorem	
Robertson–Walker 度规	Robertson–Walker metric	
Szapudi–Szalay 估计量	Szapudi–Szalay estimator	
Wigner D 函数	Wigner D -function	
Zel’dovich 薄饼	Zel’dovich pancake	
Zel’dovich 近似	Zel’dovich approximation	
sharp- k 滤波器	sharp- k filter	
一维截线	skewer	
三元组计数	triplet count	
三点相关函数	three-point correlation function	
三角形构型	triangle configuration	
三谱	trispectrum	
上帝之指效应	Finger-of-God effect (FoG)	
两点相关函数	two-point correlation function	
中心极限定理	central limit theorem	
临界密度	critical density	
二项分布	binomial distribution	
亮红星系	luminous red galaxy (LRG)	

中文	English	简单释义
估计量	estimator	
估计量偏差	estimator bias	
伽马函数	gamma function	
体积平均	volume average	
余纬	colatitude	
修改引力	modified gravity	
偏度	skewness	
傅里叶变换	Fourier transform	
傅里叶展开	Fourier expansion	
元胞计数	counts-in-cells	
光变曲线	light curve	
光子退耦	photon decoupling	
光学扩展量	etendue	
光度函数	luminosity function	
光度距离	luminosity distance	
光谱红移	spectroscopic redshift	
克罗内克 δ	Kronecker delta	
全形状	full shape (FS)	
共动坐标	comoving coordinate	
共动角直径距离	comoving angular diameter distance	
共动距离	comoving distance	
冷暗物质	cold dark matter (CDM)	
刀切法	jackknife	
分色片	dichroic plate	
切片	slice	
前景消光	foreground extinction	
功率谱	power spectrum	
加法定理	addition theorem	
勒让德多项式	Legendre polynomial	
十六极矩	hexadecapole	
单极矩	monopole	
占据数	occupation number	
卷积	convolution	
卷积定理	convolution theorem	
原初非高斯性	primordial non-Gaussianity (PNG)	
双谱	bispectrum	
反作用	backreaction	
反卷积	deconvolution	

中文	English	简单释义
反投影相关函数	deprojected correlation function	
发射线星系	emission line galaxy (ELG)	
发展角	development angle	
周期边界条件	periodic boundary condition	
品质因子	figure of merit (FoM)	
哈勃参数	Hubble parameter	
哈勃常数	Hubble constant	
哈勃距离	Hubble distance	
四极矩	quadrupole	
四点相关函数	four-point correlation function	
地平坐标系	horizontal coordinate system	
均方根	root mean square (rms)	
坍缩阈值	collapse threshold	
基准宇宙学	fiducial cosmology	
增长指数	growth index	
增长率	growth rate	
声学视界	sound horizon	
声学视界角	sound horizon angle	
壳层交叉	shell crossing	
多极数	multipole number	
多极矩	multipole moment	
多目标光谱观测	multiobject spectroscopy	
多谱	polyspectrum	
大尺度结构	large-scale structure (LSS)	
大气质量	airmass	
天空平均	sky average	
宇宙剪切	cosmic shear	
宇宙学常数	cosmological constant	
宇宙微波背景	cosmic microwave background (CMB)	
宇宙方差	cosmic variance	
宇称	parity	
完备性关系	completeness relation	
实现	realization	
实空间	real space	
密度参数	density parameter	
密度反差	density contrast	
密度场	density field	
密度扰动	density perturbation	
密度轮廓	density profile	

中文	English	简单释义
对计数	pair count	
尺度不变谱	scale-invariant spectrum	
尺度因子	scale factor	
巡天深度	survey depth	
巡天节奏	survey cadence	
巴耳末系	Balmer series	
幂律谱	power-law spectrum	
干扰参数	nuisance parameter	
平场	flat field	
平坦天空近似	flat-sky approximation	
平滑尺度	smoothing scale	
平行平面近似	plane-parallel approximation	
平面波	plane wave	
么正矩阵	unitary matrix	
广域巡天	wide survey	
引力势	gravitational potential	
引力波	gravitational wave (GW)	
弱引力透镜	weak gravitational lensing	
强引力透镜	strong gravitational lensing	
微引力透镜	microlensing	
微扰论	perturbation theory	
微胞	microcell	
感兴趣区域	region of interest (RoI)	
截断	cutoff	
扩展重子振荡光谱巡天	extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (eBOSS)	
投影相关函数	projected correlation function	
抖动	dither	
拉格朗日点	Lagrange point	
掩膜	mask	
摆线	cycloid	
散粒噪声	shot noise	
数密度	number density	
斯隆数字巡天	Sloan Digital Sky Survey (SDSS)	
方位角	azimuth	
方差	variance	
施密特望远镜	Schmidt telescope	
旋涡星系	spiral galaxy	
旋转群	rotation group	
无缝光谱观测	slitless spectroscopy	

中文	English	简单释义
日冕仪	coronagraph	
时空传承巡天	Legacy Survey of Space and Time (LSST)	
星等限巡天	magnitude-limited survey	
星系偏置	galaxy bias	
星系巡天	galaxy survey	
星系成团	galaxy clustering	
晕轨道	halo orbit	
暂现天体	transient object	
暗场	dark frame	
暗晕	dark matter halo	
暗能量	dark energy (DE)	
暗能量光谱仪	Dark Energy Spectroscopic Instrument (DESI)	
暗能量巡天	Dark Energy Survey (DES)	
暴胀	inflation	
暴胀场	inflaton	
曲率半径	curvature radius	
曲率扰动	curvature perturbation	
最后散射面	last scattering surface	
有效红移	effective redshift	
期望值	expectation value	
本动速度	peculiar velocity	
李萨如轨道	Lissajous orbit	
条件期望	conditional expectation	
极限星等	limiting magnitude	
枢轴尺度	pivot scale	
枢轴红移	pivot redshift	
标准尺	standard ruler	
标准差	standard deviation	
标准烛光	standard candle	
标量扰动	scalar perturbation	
样本方差	sample variance	
棱栅	grism	
椭球坍塌	ellipsoidal collapse	
欧拉角	Euler angles	
步进凝视	step-and-stare	
泊松分布	Poisson distribution	
泊松方差	Poisson variance	
泊松方程	Poisson equation	

中文	English	简单释义
泊松过程	Poisson process	
波数	wavenumber	
波矢	wavevector	
流量密度	flux density	
测光波段	photometric band	
测光红移	photometric redshift	
深场	deep field	
深钻场	deep drilling field	
点扩散函数	point spread function (PSF)	
热星等	bolometric magnitude	
狄拉克 δ 分布	Dirac delta distribution	
球对称坍缩	spherical collapse	
球状星团	globular cluster	
球谐函数	spherical harmonics	
球谐系数	spherical harmonic coefficient	
球贝塞尔函数	spherical Bessel function	
瑞利分布	Rayleigh distribution	
电荷耦合器件	charge coupled device (CCD)	
疏散星团	open cluster	
白噪声	white noise	
相关函数	correlation function	
矢量扰动	vector perturbation	
矮星系	dwarf galaxy	
离散傅里叶变换	discrete Fourier transform	
积分约束	integral constraint	
窗函数	window function	
立体角	solid angle	
类星体	quasar	
系综平均	ensemble average	
紫外	ultraviolet (UV)	
红外	infrared (IR)	
红移分箱	redshift bin	
红移巡天	redshift survey	
红移空间	redshift space	
红移空间畸变	redshift-space distortion (RSD)	
约化双谱	reduced bispectrum	
约化四点相关函数	reduced four-point correlation function	
线性增长因子	linear growth factor	
线性增长模	linear growing mode	

中文	English	简单释义
线性微扰论	linear perturbation theory	
绝对星等	absolute magnitude	
统计各向同性	statistical isotropy	
统计均匀性	statistical homogeneity	
维纳滤波	Wiener filter	
维里化	virialization	
维里定理	virial theorem	
缔合勒让德函数	associated Legendre function	
自助法	bootstrap	
自由度	degree of freedom (DoF)	
自相关函数	autocorrelation function	
莱曼 α 森林	Lyman- α forest	
蒙特卡洛积分	Monte Carlo integration	
行星状星云	planetary nebula	
衰减模	decaying mode	
褐矮星	brown dwarf	
视场	field of view (FoV)	
视星等	apparent magnitude	
视线	line of sight (LOS)	
角功率谱	angular power spectrum	
角直径距离	angular diameter distance	
角相关函数	angular correlation function	
误差椭圆	error ellipse	
谱指数	spectral index	
谱矩	spectral moment	
贝塔函数	beta function	
贝塞尔函数	Bessel function	
质量图	mass map	
赤纬	declination	
赤经	right ascension	
赤道坐标系	equatorial coordinate system	
超新星遗迹	supernova remnant	
距离模数	distance modulus	
转向	turnaround	
边缘效应	edge effect	
过去光锥	past light cone	
过采样	oversampling	
近红外	near infrared (NIR)	
连通相关函数	connected correlation function	
选择函数	selection function	

中文	English	简单释义
选择效应	selection effect	
透镜会聚	lensing convergence	
透镜剪切	lensing shear	
透镜势	lensing potential	
透镜层析	lensing tomography	
速度弥散	velocity dispersion	
速度散度	velocity divergence	
遍历性	ergodicity	
重子声学振荡	baryon acoustic oscillation (BAO)	
重子拖曳时期	baryon drag epoch	
重子振荡光谱巡天	Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS)	
重建	reconstruction	
重采样	resampling	
量子涨落	quantum fluctuation	
铅笔束巡天	pencil-beam survey	
银纬	galactic latitude	
银经	galactic longitude	
银道坐标系	galactic coordinate system	
阶跃函数	step function	
随机性	stochasticity	
随机星表	random catalog	
随机游走	random walk	
随机过程	random process	
雅可比行列式	Jacobian determinant	
集光面积	collecting area	
非线性增长	nonlinear growth	
非高斯性	non-Gaussianity	
顶帽滤波器	top-hat filter	
高斯分布	Gaussian distribution	
高斯滤波器	Gaussian filter	
高阶统计量	higher-order statistics	
黄纬	ecliptic latitude	
黄经	ecliptic longitude	
黄道坐标系	ecliptic coordinate system	

参考文献

- [1] J. A. Peacock. *Cosmological Physics*. Cambridge University Press, 1999. Chapter 16.
- [2] H. Mo, F. van den Bosch, and S. White. *Galaxy Formation and Evolution*. Cambridge University Press, 2010.
- [3] P. J. E. Peebles. *The Large-Scale Structure of the Universe*. Princeton University Press, 1980.
- [4] C. M. Baugh. The real-space correlation function measured from the APM Galaxy Survey. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 280:267, 1996. <https://arxiv.org/abs/astro-ph/9512011>.
- [5] A. J. Benson, R. G. Bower, C. S. Frenk, C. G. Lacey, C. M. Baugh, and S. Cole. What shapes the luminosity function of galaxies? *Astrophys. J.*, 599:38, 2003. <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0302450>.
- [6] A. G. Sánchez et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological implications of the large-scale two-point correlation function. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 425:415, 2012. <https://arxiv.org/abs/1203.6616>.
- [7] A. R. Liddle and D. H. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [8] G. B. Arfken and H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier, 6 edition, 2005.
- [9] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 1980.
- [10] E. Hawkins et al. The 2dF Galaxy Redshift Survey: correlation functions, peculiar velocities and the matter density of the Universe. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 346:78, 2003. <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0212375>.
- [11] S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003. Chapter 7.
- [12] J. Richard Gott, III et al. A map of the Universe. *Astrophys. J.*, 624:463, 2005. <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0310571>.
- [13] M. Tegmark et al. Cosmological constraints from the SDSS Luminous Red Galaxies. *Phys. Rev. D*, 74:123507, 2006. <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0608632>.
- [14] I. Szapudi. A new method for calculating counts in cells. *Astrophys. J.*, 497:16, 1998.
- [15] J. V. Wall and C. R. Jenkins. *Practical Statistics for Astronomers*. Cambridge University Press, 2012. Chapter 10.
- [16] T. J. Broadhurst, R. S. Ellis, D. C. Koo, and A. S. Szalay. Large-scale distribution of galaxies at the galactic poles. *Nature*, 343:726, 1990.
- [17] H. Kurki-Suonio, G. J. Mathews, and G. M. Fuller. Deviation from periodicity in the large-scale distribution of galaxies. *Astrophys. J. Lett.*, 356:L5–L7, 1990.

- [18] C. J. Conselice, A. Wilkinson, K. Duncan, and A. Mortlock. The evolution of galaxy number density at $z < 8$ and its implications, 2016. Draft version October 9, 2016, linked from http://hubblesite.org/news_release/news/2016-39.
- [19] Planck Collaboration. Planck 2015 results. XIII. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 594:A13, 2016. <https://arxiv.org/abs/1502.01589>.
- [20] R. Laureijs et al. Euclid Definition Study Report. Technical Report ESA/SRE(2011)12, ESA, 2011. <https://arxiv.org/abs/1110.3193>.
- [21] C. D. Shane and C. A. Wirtanen. Publications of the Lick Observatory, Vol. XXII, Part 1, 1967. As cited by Seldner et al. (1977).
- [22] M. Seldner, B. Siebers, E. J. Groth, and P. J. E. Peebles. New reduction of the Lick catalog of galaxies. *Astronomical Journal*, 82:249, 1977.
- [23] R. M. Soneira and P. J. E. Peebles. A computer model universe: Simulation of the nature of the galaxy distribution in the Lick catalog. *Astronomical Journal*, 83:845, 1978.
- [24] H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, and K. J. Donner. *Fundamental Astronomy*. Springer, 1987.
- [25] A. D. Montero-Dorta and F. Prada. The SDSS DR6 luminosity functions of galaxies. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 399:1106, 2009. <https://arxiv.org/abs/0806.4930>.
- [26] D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, and V. K. Khersonskii. *Quantum Theory of Angular Momentum*. World Scientific, 1988.
- [27] P. Vandergheynst and Y. Wiaux. In B. Forster and P. Massopust (eds.), Four Short Courses on Harmonic Analysis, Birkhäuser/Springer, p. 135, 2009.
- [28] E. W. Kolb and M. S. Turner. *The Early Universe*. Addison-Wesley, 1990.
- [29] C. Lacey and S. Cole. Merger rates in hierarchical models of galaxy formation. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 262:627, 1993. Appendix A: Critical overdensity for collapse for $\Omega_0 < 1$.
- [30] T. T. Nakamura and Y. Sato. Strong gravitational lensing and velocity function as tools to probe cosmological parameters. *Progress of Theoretical Physics*, 97:49, 1997. Appendix C: Spherical collapse in $\Omega + \lambda = 1$ universe.
- [31] D. H. Lyth and A. R. Liddle. *The Primordial Density Perturbation*. Cambridge University Press, 2009.
- [32] J. A. Peacock et al. A measurement of the cosmological mass density from clustering in the 2dF Galaxy Redshift Survey. *Nature*, 410:169, 2001.
- [33] J. E. Bautista et al. The completed SDSS-IV extended baryon oscillation spectroscopic survey: measurement of the BAO and growth rate of structure of the luminous red galaxy sample from the anisotropic correlation function between redshifts 0.6 and 1. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 500:736, 2021. <https://arxiv.org/abs/2007.08993>.

- [34] Planck Collaboration. Planck 2018 results. VI. cosmological parameters, 2018. Submitted to Astronomy & Astrophysics; <https://arxiv.org/abs/1807.06209v1>.
- [35] S. Alam et al. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 470:2617, 2017.
- [36] C. Alcock and B. Paczyński. An evolution free test for non-zero cosmological constant. *Nature*, 281:358, 1979.
- [37] M. Davis and P. J. E. Peebles. A survey of galaxy redshifts. V. the two-point position and velocity correlations. *Astrophys. J.*, 267:465, 1983.
- [38] A. J. S. Hamilton. Toward better ways to measure the galaxy correlation function. *Astrophys. J.*, 417:19, 1993.
- [39] S. D. Landy and A. S. Szalay. Bias and variance of angular correlation functions. *Astrophys. J.*, 412:64, 1993.
- [40] E. Keihanen et al. Estimating the galaxy two-point correlation function using a split random catalog. *Astronomy & Astrophysics*, 631:A73, 2019. <https://arxiv.org/abs/1905.01133>.
- [41] H. A. Feldman, N. Kaiser, and J. A. Peacock. Power-spectrum analysis of three-dimensional redshift surveys. *Astrophys. J.*, 426:23, 1994.
- [42] A. J. Ross et al. The clustering of galaxies in the completed SDSS-II Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: observational systematics and baryon acoustic oscillations in the correlation function. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 464:1168, 2017. <https://arxiv.org/abs/1607.03415>.
- [43] I. Szapudi. Three-point statistics from a new perspective. <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0404476>.
- [44] I. Szapudy and A. S. Szalay. A new class of estimators for the N -point correlations. *Astrophys. J.*, 494:L41, 1998.
- [45] Z. Slepian and D. J. Eisenstein. Computing the three-point correlation function of galaxies in $O(N^2)$ time. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 452:4142, 2015.
- [46] Z. Slepian and D. J. Eisenstein. A practical computational method for the anisotropic redshift-space three-point correlation function. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 478:1468, 2018.
- [47] Z. Slepian et al. The large-scale three-point correlation function of the SDSS BOSS DR12 CMASS galaxies. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 468:1070, 2017.
- [48] Z. Slepian et al. Detection of baryon acoustic oscillation features in the large-scale three-point correlation function of SDSS BOSS DR12 CMASS galaxies. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 469:1738, 2017.
- [49] H. Gil-Marín et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: RSD measurement from the power spectrum and bispectrum of the DR12 BOSS galaxies. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 465:1757, 2017.

- [50] S. Okamura. A historical overview of galaxy surveys. In *Proceedings of the IAU Symposium No. 341*, 2018. <https://doi.org/10.1017/S1743921319004800>.
- [51] S. J. Maddox, G. Efstathiou, W. J. Sutherland, and J. Loveday. Galaxy correlations on large scales. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 242:43P, 1990.
- [52] S. J. Maddox, G. Efstathiou, and W. J. Sutherland. The APM Galaxy Survey – III. An analysis of systematic errors in the angular correlation function and cosmological implications. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 283:1227, 1996.
- [53] V. de Lapparent, M. J. Geller, and J. P. Huchra. A slice of the universe. *Astrophys. J.*, 302:L1, 1986.
- [54] S. A. Shectman et al. The Las Campanas redshift survey. *Astrophys. J.*, 470:172, 1996.
- [55] M. Colless et al. The 2dF Galaxy Redshift Survey: spectra and redshifts. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 328:1039, 2001.
- [56] C. Heymans et al. CFHTLenS: the Canada-France-Hawaii Telescope Lensing Survey. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 427:146, 2012. <https://arxiv.org/abs/1210.0032>.
- [57] T. Erben et al. CFHTLenS: the Canada-France-Hawaii Telescope Lensing Survey – imaging data and catalogue products. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 433:2545, 2013. <https://arxiv.org/abs/1210.8156>.
- [58] M. Kilbinger et al. CFHTLenS: combined probe cosmological model comparison using 2D weak gravitational lensing. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 430:2200, 2013.
- [59] N. Jeffrey et al. Dark Energy Survey Year 3 results: Curved-sky weak lensing mass map reconstruction. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 505:4626, 2021. <https://arxiv.org/abs/2105.13539>.
- [60] Abdurro’uf et al. The seventeenth data release of the Sloan Digital Sky Surveys: Complete release of MaNGA, MaStar, and APOGEE-2 data. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 259:35, 2022. <https://arxiv.org/abs/2112.02026>.
- [61] S. Alam et al. The completed SDSS-IV extended baryon oscillation spectroscopic survey: cosmological implications from two decades of spectroscopic surveys at the Apache Point Observatory. eBOSS. <https://arxiv.org/abs/2007.08991>.
- [62] Euclid Collaboration, R. Scaramella, et al. Euclid preparation I. The Euclid Wide Survey. *Astronomy & Astrophysics*, 662:A112, 2022.
- [63] <https://rubinobservatory.org/>; https://en.wikipedia.org/wiki/Vera_C._Rubin_Observatory.
- [64] Ivezić et al. LSST: From science drivers to reference design and anticipated data products. *Astrophys. J.*, 873:111, 2019.
- [65] LSST Science Collaboration, P. Marshall, et al. Science-driven optimization of the LSST observing strategy. <https://arxiv.org/abs/1708.04058>.

- [66] <http://pswww.ifa.hawaii.edu/pswww/>; <http://www2.ifa.hawaii.edu/research/Pan-STARRS.shtml>.
- [67] DESI Collaboration. Overview of the instrumentation for the Dark Energy Spectroscopic Instrument. *Astron. J.*, 164:207, 2022. <https://www.desi.lbl.gov/>.
- [68] J. Guy et al. The spectroscopic data processing pipeline for the Dark Energy Spectroscopic Instrument. *Astron. J.*, 165:144, 2023.
- [69] <https://data.desi.lbl.gov/doc/releases/>.
- [70] National Research Council. *New Worlds, New Horizons in Astronomy and Astrophysics*. The National Academies Press, 2010. <https://doi.org/10.17226/12951>.
- [71] <https://roman.gsfc.nasa.gov/>; https://en.wikipedia.org/wiki/Nancy_Grace_Roman_Space_Telescope.
- [72] https://roman.gsfc.nasa.gov/science/WFI_technical.html.
- [73] A. Albrecht et al. Report of the Dark Energy Task Force. <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0609591>.
- [74] J. Frieman. Dark energy. UCLA Dark Matter, March 29–April 1, 2023; <https://conferences.pa.ucla.edu/dark-matter-2023/>, 2023. [https://indico.cern.ch/event/1188759/contributions/5043999/attachments/2619045/4529758/DarkEnergy-UCLA%20\(1\).pdf](https://indico.cern.ch/event/1188759/contributions/5043999/attachments/2619045/4529758/DarkEnergy-UCLA%20(1).pdf).