

《电动力学（第四版）》（郭硕鸿）
习题参考解答

中国科大 2026 春
电动力学 A 助教
Uphi.

2026 年 7 月 12 日

目录

1	电磁现象的普遍规律	3
2	静电场	14
3	静磁场	26
4	电磁波的传播	38
5	电磁波的辐射	50
6	狭义相对论	60
7	带电粒子和电磁场的相互作用	85

再版序

本答案根据网络上流传一份《电动力学（第四版）》（郭硕鸿）习题参考解答的 PDF 文件整理而来，原作者不详。本次再版利用了 AI 辅助生成 (Gemini 3.1 Pro) 结合人工校对，重新排版了原答案，修订了原答案的一些问题，同时补充了第七章的参考解答。本习题参考解答并未与郭硕鸿老师沟通确认，非官方出版，禁止用于商业用途，如涉及侵权，请联系作者删除。

习题参考解答只能作为学习时的辅助材料，确保大家对教材内容的吸收与理解，本习题参考解答不宜作为逃避日常作业的手段，本人对此概不负责。

由于个人精力有限，本次发布版本在内容和排版上均存在一些问题，远没有达到完美的程度。如果您发现内容上的严重纰漏，欢迎邮件反馈给我：uphi.ustc@gmail.com。同时也十分欢迎与我进行流物理与天文上的交流。

最新版发布链接：[《电动力学》（郭硕鸿）习题参考解答](#)。

祝大家学业顺利。

Uphi.

2026 年 7 月

于 Madison, WI, USA

First release: 2026.7.12 / version 1.0.0

Chapter 1

电磁现象的普遍规律

1. 根据算符的微分性与矢量性, 推导下列公式:

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \frac{1}{2} \nabla A^2 - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A}\end{aligned}$$

解:

(1)

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \frac{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{dx_i} \mathbf{e}_i \\ &= \mathbf{e}_i \left(\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dx_i} \right) + \mathbf{e}_i \left(\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dx_i} \right) \\ &= \frac{d\mathbf{A}}{dx_i} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_i) - \mathbf{B} \times \left(\frac{d\mathbf{A}}{dx_i} \times \mathbf{e}_i \right) + \frac{d\mathbf{B}}{dx_i} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i) - \mathbf{A} \times \left(\frac{d\mathbf{B}}{dx_i} \times \mathbf{e}_i \right) \\ &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})\end{aligned}$$

(2) 根据第一个公式, 令 $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ 即可得证.

2. 设 u 是空间坐标 x, y, z 的函数, 证明:

$$\begin{aligned}\nabla f(u) &= \frac{df}{du} \nabla u \\ \nabla \cdot \mathbf{A}(u) &= \nabla u \cdot \frac{d\mathbf{A}}{du} \\ \nabla \times \mathbf{A}(u) &= \nabla u \times \frac{d\mathbf{A}}{du}\end{aligned}$$

证明:

(1)

$$\begin{aligned}\nabla f(u) &= \frac{\partial f(u)}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f(u)}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial f(u)}{\partial z} \mathbf{e}_z \\ &= \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z \\ &= \frac{df}{du} \nabla u\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A}(u) &= \frac{\partial A_x(u)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(u)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(u)}{\partial z} \\ &= \frac{dA_x}{du} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dA_y}{du} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dA_z}{du} \frac{\partial u}{\partial z} \\ &= \nabla u \cdot \frac{d\mathbf{A}}{du}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A}(u) &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x(u) & A_y(u) & A_z(u) \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{dA_z}{du} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{dA_y}{du} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{dA_x}{du} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{dA_z}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \dots \\ &= \nabla u \times \frac{d\mathbf{A}}{du}\end{aligned}$$

3. 设 $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ 为源点 $\mathbf{x}'$ 到场点 $\mathbf{x}$ 的距离, $\mathbf{r}$ 的方向规定为从源点指向场点.

(1) 证明下列结果, 并体会对源变数球微商 $\left(\nabla' = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z'} \right)$ 与场变数求微商 $\left(\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right)$ 的关系:

$$\nabla r = -\nabla' r = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\nabla' \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (r \neq 0)$$

- (2) 求 $\nabla \cdot \mathbf{r}, \nabla \times \mathbf{r}, (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r}, \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}), \nabla \cdot [\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ 及 $\nabla \times [\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$, 其中 $\mathbf{a}, \mathbf{k}$ 及 $\mathbf{E}_0$ 均为常矢量.

证明:

- (1) 以 x 分量为例:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2r} \cdot 2(x - x') = \frac{x - x'}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial x'} = \frac{1}{2r} \cdot 2(x' - x) = -\frac{x - x'}{r}$$

其他分量同理.

以 x 分量为例:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x - x'}{r^3} \quad \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x'} = -\frac{x' - x}{r^3}$$

其他分量同理.

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x - x'}{r^3} & \frac{y - y'}{r^3} & \frac{z - z'}{r^3} \end{vmatrix} = 0$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x - x'}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y - y'}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z - z'}{r^3} = 0, \quad (r \neq 0)$$

- (2)

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial(x - x')}{\partial x} + \frac{\partial(y - y')}{\partial y} + \frac{\partial(z - z')}{\partial z} = 3$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \right) [(x - x')\mathbf{e}_x + (y - y')\mathbf{e}_y + (z - z')\mathbf{e}_z] = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z = \mathbf{a}$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r} + \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

$$\nabla \cdot [\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] = [\nabla \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \cdot \mathbf{E}_0 = \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0$$

$$\nabla \times [\mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] = [\nabla \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \times \mathbf{E}_0 = -\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0$$

4. 应用高斯定理证明：

$$\int_V \nabla \times \mathbf{f} dV = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{f}$$

应用斯托克斯 (Stokes) 定理证明：

$$\int_S d\mathbf{S} \times \nabla \varphi = \oint_L \varphi d\mathbf{l}$$

证明：

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \times \mathbf{f} dV &= \int_V \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} dV \\ &= \int_V \left[\mathbf{e}_x \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \right] dV \\ &= \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{f} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_S d\mathbf{S} \times \nabla \varphi &= \int_S \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ dS_x & dS_y & dS_z \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \int_S \left[\mathbf{e}_x \left(dS_y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - dS_z \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \mathbf{e}_y \left(dS_z \frac{\partial \varphi}{\partial x} - dS_x \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_z \left(dS_x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - dS_y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] \\ &= \oint_L \varphi d\mathbf{l} \end{aligned}$$

5. 已知一个电荷系统的电偶极矩定义为

$$\mathbf{p}(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} dV$$

利用电荷守恒定律 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 证明电偶极矩的变化率为：

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \int_V \mathbf{J} dV$$

证明：

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho'}{\partial t} \mathbf{x}' dV' = - \int_V (\nabla' \cdot \mathbf{J}') \mathbf{x}' dV'$$

以 x 分量为例:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right)_x = - \int_V (\nabla' \cdot \mathbf{J}') x' dV' = - \int_V [\nabla' \cdot (x' \mathbf{J}') - \mathbf{J}' \cdot \nabla' x'] dV' = \int_V J'_x dV' - \oint_S x' \mathbf{J}' \cdot d\mathbf{S}$$

当 $S \rightarrow \infty$ 时, $\mathbf{J}|_S = 0$, 面积分为零, 故

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \int_V \mathbf{J} dV$$

6. 若 $\mathbf{m}$ 为常矢量, 证明除 $R = 0$ 点外, 矢量 $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3}$ 的旋度等于标量 $\varphi = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}}{R^3}$ 梯度的负值, 即

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\nabla \varphi$$

其中 R 为坐标原点到场点的距离, 方向由原点指向场点.

证明:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) = -\nabla \times \left[\mathbf{m} \times \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \right]$$

利用算符公式展开可得: $(\mathbf{m} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r}$. 而

$$\nabla \varphi = \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}}{R^3} \right) = -\nabla \left[\mathbf{m} \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \right] = -(\mathbf{m} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r}$$

故

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\nabla \varphi$$

7. 有一内外半径分别为 r_1 和 r_2 的空心介质球, 介质的电容率为 ε , 使介质内均匀带电, 静止的自由电荷密度为 ρ_f . 求:

- (1) 空间各点的电场;
- (2) 极化体电荷和极化面电荷分布.

解:

(1) 由高斯定理

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int \rho_f dV$$

当 $r_1 < r < r_2$ 时:

$$D \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{3}(r^3 - r_1^3)\rho_f$$

则

$$\mathbf{E} = \frac{(r^3 - r_1^3)\rho_f}{3\varepsilon r^3} \mathbf{r}$$

当 $r > r_2$ 时:

$$\mathbf{E} = \frac{(r_2^3 - r_1^3)\rho_f}{3\varepsilon_0 r^3} \mathbf{r}$$

(2) 极化强度

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E}$$

极化体电荷

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -(\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{\rho_f}{\varepsilon} = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\rho_f$$

极化面电荷

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$$

在 $r = r_2$ 处:

$$\sigma_P = P_{1n} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{3r_2^3} \rho_f$$

在 $r = r_1$ 处:

$$\sigma_P = -P_{1n}|_{r=r_1} = 0$$

8. 内外半径分别为 r_1 和 r_2 的无穷长中空导体圆柱, 沿轴向流有恒定均匀自由电流 $\mathbf{J}_f$, 导体的磁导率为 μ , 求磁感应强度和磁化电流.

解:

利用安培环路定理

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f$$

(1) 当 $r < r_1$ 时, $I_f = 0$, 故 $\mathbf{H} = 0, \mathbf{B} = 0$.

(2) 当 $r_1 < r < r_2$ 时, $2\pi r H = J_f \pi(r^2 - r_1^2)$, 则磁感应强度为:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu J_f (r^2 - r_1^2)}{2r} \mathbf{e}_\theta = \frac{\mu (r^2 - r_1^2)}{2r^2} \mathbf{J}_f \times \mathbf{r}$$

(3) 当 $r > r_2$ 时, $2\pi r H = \pi J_f(r_2^2 - r_1^2)$, 则:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J_f (r_2^2 - r_1^2)}{2r} \mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 (r_2^2 - r_1^2)}{2r^2} \mathbf{J}_f \times \mathbf{r}$$

磁化体电流密度为:

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \nabla \times \mathbf{H} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \mathbf{J}_f \quad (r_1 < r < r_2)$$

磁化面电流密度 $\boldsymbol{\alpha}_M = \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)$:

在内表面 $r = r_1$ 处,

$$\boldsymbol{\alpha}_M = 0$$

在外表面 $r = r_2$ 处,

$$\boldsymbol{\alpha}_M = - \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_2^2} \mathbf{J}_f$$

9. 证明均匀介质内部的体极化电荷密度 ρ_P 总是等于体自由电荷密度 ρ_f 的 $-(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})$ 倍.

证明:

根据极化电荷定义及介质中的高斯定理:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot [(\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}] = -(\varepsilon - \varepsilon_0) \nabla \cdot \mathbf{E}$$

由 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\varepsilon}$ 代入上式得:

$$\rho_P = -(\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{\rho_f}{\varepsilon} = - \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right) \rho_f$$

证毕.

10. 证明两个闭合的恒定电流圈之间的相互作用力大小相等, 方向相反 (但两个电流元之间的相互作用力一般并不服从牛顿第三定律).

证明:

(1) 线圈 1 在线圈 2 的磁场中受力为

$$\mathbf{F}_{12} = \oint_{l_1} I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}_2$$

展开得：

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \left[d\mathbf{l}_2 (d\mathbf{l}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}) - \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2) \right]$$

(2) 对于闭合回路，第一项

$$\oint_{l_1} d\mathbf{l}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = \oint_{l_1} d\left(\frac{-1}{r_{12}}\right) = 0$$

因此相互作用力化简为：

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)$$

同理可得 $\mathbf{F}_{21}$ ，由于 $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12}$ ，故 $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$

11. 平行板电容器内有两层介质，它们的厚度分别为 l_1 和 l_2 ，电容率为 ε_1 和 ε_2 ，今在两板上接上电动势为 $\mathcal{E}$ 的电池，求：

(1) 电容器两板上的自由电荷面密度 ω_f ；

(2) 介质分界面上的自由电荷面密度 ω_f 。

若介质是漏电的，电导率分别为 σ_1 和 σ_2 ，当电流达到恒定时，上述两问题的结果如何。
解：

(1) 静电平衡时：

$$l_1 E_1 + l_2 E_2 = E$$

且

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$$

得

$$E_1 = \frac{\varepsilon_2 E}{l_1 \varepsilon_2 + l_2 \varepsilon_1}, E_2 = \frac{\varepsilon_1 E}{l_1 \varepsilon_2 + l_2 \varepsilon_1}$$

极板自由电荷密度

$$\sigma_{f1} = D_1 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 E}{l_1 \varepsilon_2 + l_2 \varepsilon_1}$$

分界面上无自由电荷

$$\sigma_f = 0$$

(2) 漏电恒定时：

$$j_1 = j_2 = \frac{E}{\frac{l_1}{\sigma_1} + \frac{l_2}{\sigma_2}}$$

场强

$$E_1 = \frac{\sigma_2 E}{l_1 \sigma_2 + l_2 \sigma_1}, E_2 = \frac{\sigma_1 E}{l_1 \sigma_2 + l_2 \sigma_1}$$

分界面自由电荷密度

$$\sigma_{ftr} = D_2 - D_1 = \frac{\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2}{l_1 \sigma_2 + l_2 \sigma_1} E$$

12. 证明：

(1) 当两种绝缘介质的分界面上不带自由面电荷时，电场线的曲折满足：

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

其中 ε_1 和 ε_2 分别为两介质的电容率， θ_1 和 θ_2 分别为电场线与界面法线的夹角.

(2) 当两种导电介质内有恒定电流时，分界面上电场线的曲折满足：

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

其中 σ_1 和 σ_2 分别为两介质的电导率.

证明：

(1) 根据边界条件

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \varepsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos \theta_2$$

两式相除得

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

(2) 恒定电流时

$$J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow \sigma_1 E_1 \cos \theta_1 = \sigma_2 E_2 \cos \theta_2$$

结合切向连续条件得

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

13. 试用边值关系证明：在绝缘介质与导体的分界面上，在静电情况下，导体外表面的电场线总是垂直于导体表面；在恒定电流情况下，导体内表面电场线总是平行于导体表面。

证明：

(1) 静电平衡时导体内 $E_1 = 0$. 由

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

知 $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = 0$, 故 $\mathbf{E}_2$ 垂直于表面。

(2) 恒定电流时导体表面 $\sigma_f = 0$, 由 $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f$. 若导体外为绝缘介质则 $\mathbf{D}_2 = 0$, 得

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1 = 0$$

即导体内电场与法线垂直，平行于表面。

14. 内外半径分别为 a 和 b 的无穷长圆柱形电容器，单位长度电荷为 λ_f ，板间填充电导率为 σ 的非磁性物质：

- (1) 证明在介质中任何一点传导电流与位移电流严格抵消，因此内部无磁场；
- (2) 求 λ_f 随时间的衰减规律；
- (3) 求与轴相距为 r 的地方的能量耗散功率密度；
- (4) 求长度为 l 的一段介质总的能量消耗功率，并证明它等于这段的静电能减少率。

解：根据高斯定理，在半径为 r ($a < r < b$) 处的电位移矢量 $\mathbf{D}$ 和电场强度 $\mathbf{E}$ 分别为：

$$\mathbf{D}(r, t) = \frac{\lambda_f(t)}{2\pi r} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{E}(r, t) = \frac{\lambda_f(t)}{2\pi\epsilon r} \mathbf{e}_r$$

根据欧姆定律的微分形式：

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma \lambda_f(t)}{2\pi\epsilon r} \mathbf{e}_r$$

单位长度极板上的电荷减少率等于流出的传导电流总量。取一段长度为 l 的圆柱面，流出的总电流为 $I = \mathbf{J} \cdot (2\pi r l)$ ，则单位长度的电荷变化满足：

$$-\frac{d\lambda_f}{dt} = J \cdot (2\pi r) = \frac{\sigma \lambda_f}{2\pi\epsilon r} \cdot 2\pi r = \frac{\sigma}{\epsilon} \lambda_f$$

(1) 对电位移矢量 $\mathbf{D}$ 求时间偏导:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\lambda_f(t)}{2\pi r} \mathbf{e}_r \right) = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\lambda_f}{dt} \mathbf{e}_r = -\frac{\sigma \lambda_f}{2\pi \epsilon r} \mathbf{e}_r$$

将传导电流与位移电流相加:

$$\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\sigma \lambda_f}{2\pi \epsilon r} \mathbf{e}_r + \left(-\frac{\sigma \lambda_f}{2\pi \epsilon r} \mathbf{e}_r \right) = 0$$

由于总电流密度(全电流密度)处处为零, 根据全电流定律 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$, 且系统具有轴对称性, 故内部磁场 $\mathbf{B} = 0$ 。

(2) 由

$$-\frac{d\lambda_f}{dt} = \frac{\sigma}{\epsilon} \lambda_f$$

解得 $\lambda_f = \lambda_{f0} e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$ 。

(3) 能量耗散功率密度

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = \sigma \left(\frac{\lambda_f}{2\pi \epsilon r} \right)^2$$

(4) 长度为 l 的总耗散功率

$$P = \int_a^b p(l \cdot 2\pi r dr) = \frac{l\sigma\lambda_f^2}{2\pi\epsilon^2} \ln \frac{b}{a}$$

静电能

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = \frac{l\lambda_f^2}{4\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

可以计算证明 $-\frac{dW}{dt} = P$, 证明能量耗散等于静电能减少率。

Chapter 2

静电场

1. 一个半径为 R 的电介质球，极化强度 $\mathbf{P} = K \frac{\mathbf{r}}{r^2}$ ，电容率为 ϵ 。

- (1) 计算束缚电荷的体密度和面密度；
- (2) 计算自由电荷体密度；
- (3) 计算球外和球内的电势；
- (4) 求该带电介质球产生的静电场总能量。

解：

- (1) 束缚电荷体密度和面密度：

体密度：

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -K \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^2} = -K \left(\nabla \frac{1}{r^2} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{r^2} \nabla \cdot \mathbf{r} \right) = -\frac{K}{r^2}$$

面密度（球外无极化， $\mathbf{P}_2 = 0$ ）：

$$\sigma_P = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_1|_R = \mathbf{e}_r \cdot K \frac{\mathbf{r}}{r^2} \Big|_R = \frac{K}{R}$$

- (2) 自由电荷体密度：

由 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 及 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ 得

$$\mathbf{D} = \frac{\epsilon \mathbf{P}}{\epsilon - \epsilon_0}$$

$$\rho_f = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\epsilon}{\epsilon - \epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\epsilon K}{(\epsilon - \epsilon_0) r^2}$$

(3) 球外和球内的电势:

球外电场 ($r > R$) 由高斯定理得:

$$E_{\text{out}} \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R \frac{\epsilon K}{(\epsilon - \epsilon_0)r^2} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\epsilon KR}{\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)}$$

$$\mathbf{E}_{\text{out}} = \frac{\epsilon KR}{\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)r^2} \mathbf{e}_r$$

球外电势:

$$\phi_{\text{out}} = \frac{\epsilon KR}{\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)r}$$

球内电场 ($r < R$):

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = \frac{K}{(\epsilon - \epsilon_0)} \frac{\mathbf{r}}{r^2}$$

球内电势:

$$\phi_{\text{in}} = \int_r^R \mathbf{E}_{\text{in}} \cdot d\mathbf{r} + \phi_{\text{out}}(R) = \frac{\epsilon K}{\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)} + \frac{K}{\epsilon - \epsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

(4) 总静电场能量:

总能量为 $W = \int \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV$ 。

球内能量:

$$W_{\text{in}} = 2\pi\epsilon R \left(\frac{K}{\epsilon - \epsilon_0} \right)^2$$

球外能量:

$$W_{\text{out}} = \frac{2\pi\epsilon^2 RK^2}{\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)^2}$$

总能量:

$$W = W_{\text{in}} + W_{\text{out}} = 2\pi\epsilon R \left(1 + \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right) \left(\frac{K}{\epsilon - \epsilon_0} \right)^2$$

2. 在均匀外电场 $\mathbf{E}_0$ 中置入半径为 R_0 的导体球，试用分离变数法求：

(1) 导体球接电池，保持电势 Φ_0 ；

(2) 导体球带总电荷 Q 。

解：

(1) 导体球接电池，保持电势 ϕ_0 ：

定解条件：

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (R > R_0)$$

$$\Phi|_{R=R_0} = \Phi_0$$

$$\Phi|_{R \rightarrow \infty} = -E_0 R \cos \theta + \varphi_0$$

通解为

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta)$$

代入边界条件得：

$$\Phi_{\text{out}} = -E_0 R \cos \theta + \varphi_0 + \frac{(\Phi_0 - \varphi_0)R_0}{R} + \frac{E_0 R_0^3}{R^2} \cos \theta$$

(2) 导体球带总电荷 Q ：

边界条件变为

$$-\oint \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial R} ds = Q$$

解得：

$$\Phi_{\text{out}} = \varphi_0 - E_0 R \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{E_0 R_0^3}{R^2} \cos \theta$$

球内电势为常数：

$$\Phi_{\text{in}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} - \varphi_0$$

3. 均匀介质球中心置一点电荷 Q_f ，球的电容率为 ϵ ，球外为真空，用分离变数法求空间电势，把结果与使用高斯定理所得结果比较。

解：

高斯法：

球外 ($R > R_0$):

$$\mathbf{E} = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{e}_r, \quad \phi = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon_0 R}$$

球内 ($R < R_0$):

$$\mathbf{E} = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon R^2} \mathbf{e}_r, \quad \phi = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon R} + \frac{Q_f}{4\pi R_0} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right)$$

分离变量法：

电势由点电荷电势与极化电荷电势 ϕ' 叠加。设：

$$\phi_{\text{in}} = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon R} + a, \quad \phi_{\text{out}} = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon R} + \frac{b}{R}$$

利用边界条件在 $R = R_0$ 处 $\phi_{\text{in}} = \phi_{\text{out}}$ 及 $\epsilon \frac{\partial \phi_{\text{in}}}{\partial R} = \epsilon_0 \frac{\partial \phi_{\text{out}}}{\partial R}$ 。

解得：

$$b = \frac{Q_f}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right), \quad a = \frac{Q_f}{4\pi R_0} \left(\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right)$$

结果与高斯法完全一致。

4. 均匀介质球（电容率为 ϵ_1 ）中心置一自由电偶极子 $\mathbf{p}_f$ ，球外充满了另一种介质（电容率为 ϵ_2 ），求空间各点的电势和极化电荷分布。

解：

设定解形式：

$$\phi = \frac{\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_1 R^3} + \phi'$$

球内：

$$\phi_1 = \frac{p_f \cos \theta}{4\pi\epsilon_1 R^2} + A_1 R \cos \theta$$

球外：

$$\phi_2 = \frac{p_f \cos \theta}{4\pi\epsilon_1 R^2} + \frac{B_1}{R^2} \cos \theta$$

由边界条件在 $R = R_0$ 处 $\phi_1 = \phi_2$ 连续及 D_n 连续，解得：

$$A_1 = \frac{2(\epsilon_1 - \epsilon_2)p_f}{4\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)R_0^3}, \quad B_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)p_f}{4\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)}$$

极化面电荷密度：

$$\sigma_P = \left[(\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{\partial \phi_2}{\partial R} - (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{\partial \phi_1}{\partial R} \right]_{R=R_0} = -\frac{3\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)p_f \cos \theta}{2\pi\epsilon_1(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)R_0^3}$$

5. 空心导体球壳内外半径为 R_1 和 R_2 ，球心置一偶极子 $\mathbf{p}$ ，球壳上带电 Q ，求空间各点电势和电荷分布.

解：

各区域电势：

区域 1 ($r < R_1$):

$$\phi_1 = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 R_1^3} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

区域 2 ($R_1 < r < R_2$): 导体内部为等势体

$$\phi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

区域 3 ($r > R_2$): 由高斯定理，偶极子对球外电场贡献为零（感应电荷抵消）

$$\phi_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

电荷分布：

内表面 $r = R_1$ 感应电荷面密度：

$$\sigma_{\text{ind}} = -\frac{3p \cos \theta}{4\pi R_1^3}$$

外表面 $r = R_2$ 自由电荷均匀分布：

$$\sigma_f = \frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

6. 在均匀外电场 $\mathbf{E}_0$ 中置入一带均匀自由电荷 ρ_f 的绝缘介质球（电容率为 ϵ ），求空间各点的电势.

解：

球内 ($r < R_0$):

$$\phi_{\text{in}} = \frac{\rho_f}{6\epsilon}(R_0^2 - r^2) - \frac{3\epsilon_0 E_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} r \cos \theta + \frac{\rho_f R_0^2}{3\epsilon_0}$$

或简化形式：

$$\phi_{\text{in}} = -\frac{\rho_f r^2}{6\epsilon} - \frac{3\epsilon_0 E_0 r \cos \theta}{\epsilon + 2\epsilon_0} + C_0$$

球外 ($r > R_0$):

$$\phi_{\text{out}} = -E_0 r \cos \theta + \frac{E_0 R_0^3 (\epsilon - \epsilon_0)}{r^2 (\epsilon + 2\epsilon_0)} \cos \theta + \frac{\rho_f R_0^3}{3\epsilon_0 r}$$

利用边界条件 $r = R_0$ 处的 ϕ 与 D_n 连续方程联立解出系数 B_0, B_1, C_0, C_1 ，得最终结果。

球外电势包含点电荷项、偶极子感应项和外场项；球内电势包含体电荷贡献项和极化后的均匀场项。

7. 在一个很大的电解槽中充满电导率为 σ_2 的液体，使其中流着均匀的电流 $\mathbf{J}_{f0}$ 。今在液体中置入一个电导率为 σ_1 的小球，求稳恒时电流分布和面电荷分布，讨论 $\sigma_1 \gg \sigma_2$ 及 $\sigma_2 \gg \sigma_1$ 两种情况的电流分布特点。

解：

首先求空间电势。由于是稳恒电流，满足 $\nabla^2 \phi = 0$ 。
边界条件为：在 $r = R_0$ 处 $\phi_1 = \phi_2$ 且 $\sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} = \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r}$
当 $r \rightarrow \infty$ 时， $\phi_2 \rightarrow -E_0 r \cos \theta$ ，其中

$$J_{f0} = \sigma_2 E_0$$

解得电势分布为：

$$\begin{cases} \phi_1 = -\frac{3\sigma_2}{\sigma_1 + 2\sigma_2} E_0 r \cos \theta, & r < R_0 \\ \phi_2 = -E_0 r \cos \theta + E_0 R_0^3 \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + 2\sigma_2} \right) \frac{\cos \theta}{r^2}, & r > R_0 \end{cases}$$

电流密度 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla \phi$ ：

球内电流为均匀分布：

$$\mathbf{J}_{\text{in}} = \frac{3\sigma_1}{\sigma_1 + 2\sigma_2} \mathbf{J}_{f0}$$

球外电流：

$$\mathbf{J}_{\text{out}} = \mathbf{J}_{f0} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) R_0^3}{\sigma_1 + 2\sigma_2} \left[\frac{3(\mathbf{J}_{f0} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{J}_{f0}}{r^3} \right]$$

面电荷分布：

$$\omega_f = \epsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) = \frac{3(\sigma_1 - \sigma_2) \epsilon_0 J_{f0} \cos \theta}{(\sigma_1 + 2\sigma_2) \sigma_2}.$$

(1) 若 $\sigma_1 \gg \sigma_2$ (良导体球)：则 $\mathbf{J}_{\text{in}} \approx 3\mathbf{J}_{f0}$ ，电流向球内集中。

(2) 若 $\sigma_2 \gg \sigma_1$ (绝缘球)：则 $\mathbf{J}_{\text{in}} \approx 0$ ，电流绕过小球。

8. 半径为 R_0 的导体球外充满均匀绝缘介质 ϵ , 导体球接地, 离球心 a 处 ($a > R_0$) 置一点电荷 Q_f . 试用分离变数法求空间各点电势, 证明所得结果与镜像法结果相同.

证明:

(1) 分离变数法:

球外电势分解为:

$$\phi = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon R} + \phi'$$

其中 ϕ' 是感应电荷产生的电势。

在 $R_0 < r < a$ 区域, 展开为:

$$\phi = \frac{Q_f}{4\pi\epsilon a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

由 $r = R_0$ 时 $\phi = 0$ 的边界条件得:

$$B_l = -\frac{R_0^{2l+1}}{a^l} \frac{Q_f}{4\pi\epsilon a}$$

(2) 镜像法:

像电荷电量和位置为:

$$Q' = -\frac{R_0}{a} Q_f, \quad r_0 = \frac{R_0^2}{a}$$

空间电势为:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{Q_f}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}} + \frac{Q'}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}} \right]$$

将此式按勒让德级数展开, 结果与分离变数法完全一致。

9. 接地的空心导体球内外半径为 R_1 和 R_2 , 在球内离球心 a ($a < R_1$) 处点电荷 Q , 用镜像法求电势. 感应电荷有多少? 分布在内表面还是外表面?

解:

由于球壳接地, 导体内及球外电势恒为 0。球内电势只需满足在 $r = R_1$ 处为 0。

利用镜像法, 设置像电荷:

$$Q' = -\frac{R_1}{a} Q, \quad r_0 = \frac{R_1^2}{a}$$

球内电势 ($r < R_1$) 为:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}} - \frac{QR_1/a}{\sqrt{r^2 + \frac{R_1^4}{a^2} - \frac{2R_1^2 r}{a}\cos\theta}} \right]$$

感应电荷总量为 $-Q$, 全部归于内表面, 外表面无感应电荷。

10. 上题导体球壳不接地, 而是带总电荷 Q_0 (或电势 ϕ_0), 或使其有确定电势 φ_0 , 试求这两种情况的电势. 又问 ϕ_0 与 Q_0 满足何种关系时, 两种情况的解是相等的?

解:

球壳是等势体。球内电势由点电荷 Q 、像电荷 Q' 以及球壳整体贡献的附加电势叠加而成。

球壳整体电势为:

$$\phi_{shell} = \frac{Q + Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

(1) 已知 Q_0 时, 球内 ($r < R_1$) 电势为:

$$\phi = \phi_{image} + \frac{Q + Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_2} - \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

(2) 球外 ($r > R_2$) 由高斯定理得:

$$\phi_{out} = \frac{Q + Q_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

当 $\phi_0 = \frac{Q + Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_2}$ 时, 两种情况的解相同。

11. 接地导体平面上有一半径为 a 的半球凸部, 半球的球心在导体平面上, 点电荷 Q 位于对称轴上, 并与平面相距为 b ($b > a$) 处, 试用电像法求空间电势。

解:

本系统需要构造三个镜像电荷来满足导体平面和半球面电势为 0 的边界条件:

(1) 关于球面的镜像: $Q_1 = -\frac{a}{b}Q$, 位于 $r_1 = \frac{a^2}{b}$;

(2) 关于平面的镜像: $Q_3 = -Q$, 位于 $r_3 = -b$;

(3) 镜像电荷 Q_1 关于平面的镜像: $Q_2 = \frac{a}{b}Q$, 位于 $r_2 = -\frac{a^2}{b}$ 。

空间电势为这四个电荷 (含原电荷) 产生电势的叠加。

12. 有一点电荷 Q 位于两个互相垂直的接地导体平面围成的直角空间内, 到两平面距离为 a 和 b , 求空间电势。

解:

利用镜像法, 在四个象限分别放置电荷:

(1) 第一象限: 原电荷 Q , 坐标 (a, b, z_0) ;

(2) 第二象限: 镜像电荷 $-Q$, 坐标 $(-a, b, z_0)$;

(3) 第四象限：镜像电荷 $-Q$ ，坐标 $(a, -b, z_0)$ ；

(4) 第三象限：镜像电荷 Q ，坐标 $(-a, -b, z_0)$ 。

空间电势为：

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^4 \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

该解满足 $y = 0$ 和 $z = 0$ 平面上电势为 0 的边界条件。

13. 设有两平面围成的直角形无穷容器，其内充满电导率为 σ 的液体。取两平面为 xz 面和 yz 面，在 (x_0, y_0, z_0) 和 $(x_0, y_0, -z_0)$ 两点分别置正负电极并通以电流 I ，求导电液体中的电势。

解：

在恒定电流场中，可以类比静电场处理。在 A 点 (x_0, y_0, z_0) 注入电流 I ，对应有有效电荷 $Q = \frac{I\epsilon}{\sigma}$ ；在 B 点 $(x_0, y_0, -z_0)$ 抽出电流 I ，对应电荷 $-Q = -\frac{I\epsilon}{\sigma}$ 。

由于容器壁 ($x = 0$ 和 $y = 0$) 满足 $\mathbf{j}_n = 0$ ，即 $\mathbf{E}_n = 0$ ，这要求在该边界上电势的法向导数为零。

通过镜像法，需在四个象限对称放置 8 个点电荷 (A 点 4 个，B 点 4 个) 以满足边界条件：

(1) 对于 A 点，在 $(x_0, y_0, z_0), (-x_0, y_0, z_0), (x_0, -y_0, z_0), (-x_0, -y_0, z_0)$ 各放置一个 $+Q$ ；

(2) 对于 B 点，在对应的 $z = -z_0$ 平面位置各放置一个 $-Q$ 。

最终电势为这 8 个点电荷产生电势的叠加：

$$\phi(x, y, z) = \frac{I}{4\pi\sigma} \sum_{i=1}^8 \frac{\pm 1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

14. 画出函数 $\frac{d\delta(x)}{dx}$ 的图，说明 $\rho = -(\mathbf{p} \cdot \nabla)\delta(\mathbf{r})$ 是一个位于原点的偶极子的电荷密度。

解：

$\delta(x)$ 在 $x = 0$ 处无穷大，其他地方为 0。其微商定义为：

$$\frac{d\delta(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\delta(x + \Delta x) - \delta(x)}{\Delta x}$$

性质：

(1) 当 $x \neq 0$ 时， $\frac{d\delta(x)}{dx} = 0$ ；

(2) 当 $x \rightarrow 0^-$ 时, 函数趋向 $+\infty$; 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 函数趋向 $-\infty$ 。

图像表现为在原点左侧极窄的无限正脉冲和右侧极窄的无限负脉冲的叠加, 这恰好描述了两个相距极近、电量无限大的异号点电荷组成的系统, 即位于原点的点偶极子。

15. 证明:

(1) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, ($a > 0$) (若 $a < 0$, 结果如何?);

(2) $x\delta(x) = 0$.

证明:

(1) 可以证明 $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$:

根据 $\delta[g(x)] = \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{|g'(x_k)|}$, 其中 $g(x) = ax$ 只有一个零点 $x_1 = 0$, 且 $g'(0) = a$ 。

因此:

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

(2) 证明 $x\delta(x) = 0$:

对于任意良函数 $f(x)$, 有

$$\int f(x)[x\delta(x)]dx = [xf(x)]\Big|_{x=0} = 0$$

根据 δ 函数的定义, 得

$$x\delta(x) = 0$$

16. 一块极化介质的极化矢量为 $\mathbf{P}(\mathbf{x}')$, 根据偶极子静电势的公式, 极化介质所产生的静电势为

$$\varphi = \int_V \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} dV'$$

另外, 根据极化电荷公式 $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ 及 $\omega_P = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, 极化介质产生的电势又可表示为

$$\varphi = - \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0 r} dV' + \oint_S \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}'}{4\pi\epsilon_0 r}$$

证明以上两表达式是相同的.

证明:

利用恒等式:

$$\mathbf{P} \cdot \nabla' \frac{1}{r} = \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{r} \right) - \frac{1}{r} \nabla' \cdot \mathbf{P}$$

由于 $\nabla' \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$, 代入第一式:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P} \cdot \nabla' \frac{1}{r} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_V \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{r} \right) dV' - \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{r} dV' \right]$$

应用高斯定理将第一项体积分转为面积分:

$$\int_V \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{r} \right) dV' = \oint_S \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}{r} dS'$$

即得证两式等同:

$$\phi = \int_V \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} dV' = - \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0 r} dV' + \oint_S \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}'}{4\pi\epsilon_0 r}$$

17. 证明下述结果, 并熟悉面电荷和面偶极层两侧电势和电场的变化.

- (1) 在面电荷两侧, 电势连续但法向微商有跃变;
- (2) 在面偶极层两侧, 电势有跃变

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

但电势的法向微商是连续的.

证明:

- (1) 面电荷两侧: 电势连续但法向微商有跃变

面电荷密度为 σ . 取跨越表面的扁盒做高斯面, 得:

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

由于 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, 则:

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n} - \frac{\partial\phi_2}{\partial n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

存在跃变. 电势 ϕ 为场强的积分, 在跨越面时积分路径趋于零, 故电势连续.

- (2) 面偶极层两侧: 电势有跃变但法向微商连续

面偶极层由两层等量异号面电荷 $\pm\sigma$ 组成, 间距 $l \rightarrow 0$. 层内场强 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

电势差:

$$\phi_2 - \phi_1 = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\epsilon_0} l = \frac{P}{\epsilon_0}$$

而在偶极层外, 正负电荷产生的电场抵消, 故法向微商 (场强) 连续.

18. 一半径为 R_0 的球面, 在球坐标 $0 < \theta < \pi/2$ 的半球面上电势为 ϕ_0 , 在 $\pi/2 < \theta < \pi$ 的半球面上电势为 $-\phi_0$, 求空间各点电势.

解:

这是一个具有球对称性的拉普拉斯方程定解问题。球内通解为:

$$\phi = \sum_l A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

利用边界条件 $f(\theta)$ 进行勒让德展开, 系数为:

$$A_l R_0^l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx$$

由于 $f(x)$ 是奇函数, 当 l 为偶数时 $A_l = 0$ 。

当 l 为奇数时, 利用提示公式计算得:

$$A_l = \frac{\phi_0}{R_0^l} (-1)^{\frac{l-1}{2}} \frac{(l-2)!!}{(l+1)!!} (2l+1)$$

最终空间电势为:

球内 ($r < R_0$):

$$\phi = \sum_{l=1,3,\dots} A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

球外 ($r > R_0$):

$$\phi = \sum_{l=1,3,\dots} \frac{A_l R_0^{2l+1}}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

19. 上题能用格林函数方法求解吗? 结果如何?

解:

可以使用格林函数方法求解. 对于球面边界条件, 适用的格林函数为满足

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

且 G 在球面 $r = R_0$ 上满足 $G(R_0, \theta, \phi; r', \theta', \phi') = 0$ 的函数.

Chapter 3

静磁场

1. 试用矢势 $\mathbf{A}$ 表示一个沿 z 方向的均匀恒定磁场 $\mathbf{B}_0$, 写出 $\mathbf{A}$ 的两种不同表示式, 证明二者之差是无旋场.

解:

已知 $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$, 且 $\mathbf{B}_0 = \nabla \times \mathbf{A}$. 在直角坐标系中:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

根据此方程组, 可得 $\mathbf{A}$ 的多组解, 这里仅列举两个:

(1) 令 $A_y = A_z = 0$, 则 $\frac{\partial A_x}{\partial z} = 0$ 且 $-\frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0$. 解得 $\mathbf{A}_1 = [-B_0 y + f(x)] \mathbf{e}_x$.

(2) 令 $A_x = A_z = 0$, 则 $-\frac{\partial A_y}{\partial z} = 0$ 且 $\frac{\partial A_y}{\partial x} = B_0$. 解得 $\mathbf{A}_2 = [B_0 x + g(y)] \mathbf{e}_y$.

两者之差为:

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 = [-B_0 y + f(x)] \mathbf{e}_x - [B_0 x + g(y)] \mathbf{e}_y.$$

这里 Δ 表示差值, 而不是 Laplace 算子. 计算其旋度:

$$\nabla \times (\Delta \mathbf{A}) = 0.$$

这说明两者之差是无旋场.

2. 均匀无穷长直圆柱形螺线管, 每单位长度线圈匝数为 n , 电流强度为 I , 试用唯一性定理求管内外磁感应强度 $\mathbf{B}$.

解:

取螺线管中轴线为 z 轴. 利用毕奥-萨伐尔定律计算轴线上一点 (取为原点) 的磁场:

- (1) 螺线管内：对于无限长理想螺线管，内部磁场是均匀的。取长度 dz' 的一段，其电流为 $nIdz'$ 。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{nIdz'(\mathbf{dl} \times \mathbf{r})}{r^3}.$$

积分计算得轴线上磁感应强度

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \mathbf{e}_z.$$

内部场均匀，因此上式即为管内磁感应强度。

- (2) 螺线管外：由于系统具有轴对称性且螺线管无限长，磁感应线不穿出螺线管，故

$$\mathbf{B} = 0.$$

3. 设有无穷长的线电流 I 沿 z 轴流动， $z < 0$ 空间充满磁导率为 μ 的均匀介质， $z > 0$ 区域为真空。试用唯一性定理求磁感应强度 $\mathbf{B}$ ，然后求出磁化电流分布。

解：

在两侧区域（除去 z 轴上的自由线电流）有

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

并满足线性关系

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (z > 0), \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (z < 0).$$

取半径为 r 、与 xy 平面平行的圆周环路（圆心在 z 轴上，且整个环路位于 $z > 0$ 或 $z < 0$ 的任一侧）。由安培环路定理

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

得

$$H_\phi(r) = \frac{I}{2\pi r}.$$

故两侧的 $\mathbf{H}$ 相同：

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi.$$

于是

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi, & z > 0, \\ \mu \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi, & z < 0. \end{cases}$$

再检验界面 $z = 0$ 的边界条件:

$$B_{1n} = B_{2n} = 0, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0$$

(界面无自由面电流) 均成立. 在给定自由电流与无穷远衰减条件下, 该解由唯一性定理唯一确定.

下面求磁化电流 (仅在 $z < 0$ 介质中存在). 介质磁化强度

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{H} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi.$$

体磁化电流密度

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}.$$

对 $r > 0$, 因 $M_\phi \propto 1/r$, 可得 $\mathbf{J}_M = 0$. 但在 $r = 0$ 轴线上存在奇性等效线电流, 其大小为

$$I_{M,\text{axis}} = \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r M_\phi = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) I,$$

方向沿 $+z$.

界面 $z = 0$ 处还存在面磁化电流

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_z (\text{由介质指向真空}),$$

故

$$\mathbf{K}_M = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_r.$$

它沿径向分布 (在界面内由轴线向外), 与轴线上等效束缚电流共同满足电流连续性.

4. 设 $x < 0$ 半空间充满磁导率为 μ 的均匀介质, $x > 0$ 空间为真空. 今有线电流 I 沿 z 轴流动, 求磁感应强度和磁化电流分布.

解:

设区域 1 为 $x > 0$ (真空), 区域 2 为 $x < 0$ (介质). 除 z 轴自由线电流外, 两侧均满足 $\nabla \times \mathbf{H} = 0$.

在 xy 平面取半径为 r 的圆周环路 C (圆心在原点). 该环路一半在真空、一半在介质中, 于是

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_1} H_{\phi 1} dl + \int_{C_2} H_{\phi 2} dl = \pi r H_{\phi 1} + \pi r H_{\phi 2} = I,$$

即

$$H_{\phi 1} + H_{\phi 2} = \frac{I}{\pi r}. \quad (1)$$

再用界面 $x = 0$ 的边界条件（除轴线外无自由面电流）. 界面法向取 $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$, 有

$$B_{1n} = B_{2n}.$$

本题磁场沿环向, 且在 $x = 0$ 处环向正好平行于 $\pm \mathbf{e}_x$, 故这就是法向分量条件:

$$\mu_0 H_{\phi 1} = \mu H_{\phi 2}. \quad (2)$$

联立 (1)(2) 得

$$H_{\phi 1} = \frac{\mu}{\mu + \mu_0} \frac{I}{\pi r}, \quad H_{\phi 2} = \frac{\mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{I}{\pi r}.$$

因此

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{B}_2 = \mu \mathbf{H}_2 \Rightarrow \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \frac{\mu \mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{I}{\pi r} \mathbf{e}_\phi.$$

所以整个空间可写为

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu \mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{I}{\pi r} \mathbf{e}_\phi.}$$

该场同时满足麦克斯韦方程、界面条件与无穷远条件, 故由唯一性定理即为唯一解.

磁化电流只在介质侧 $x < 0$ 存在. 先算磁化强度:

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{H}_2 = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \mathbf{H}_2 = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{I}{\pi r} \mathbf{e}_\phi.$$

对 $r > 0$, $\nabla \times \mathbf{M} = 0$, 故体磁化电流在介质体内处处为零（轴线奇性除外）.

轴线上等效束缚线电流由环量给出:

$$I_M = \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} I,$$

方向沿 $+z$.

另外, 界面 $x = 0$ 处有面磁化电流

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_x,$$

其方向沿 $\pm z$ （随 y 号而变）并在界面上分布; 与轴线上等效束缚线电流共同构成完整磁化电流分布.

5. 某轴对称磁场在柱坐标原点附近已知 $B_z \approx B_0 - C(z^2 - \frac{1}{2}\rho^2)$, 试求该处的 B_ρ .
解:

由 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 在柱坐标系中:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

代入 B_z 的表达式: $\frac{\partial B_z}{\partial z} = -2Cz$. 则 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} = 2Cz$, 即 $\frac{\partial}{\partial \rho} = 2Cz\rho$. 积分得 $\rho B_\rho = Cz\rho^2 + A$. 取 $A = 0$ (原点处场有限), 解得 $B_\rho = Cz\rho$. 验证 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$: 由于区域内无电流, 满足该条件.

6. 两个半径为 a 的同轴线圈位于 $z = \pm L$ 面上, 每个线圈上载有同方向的电流 I .

(1) 求轴线上的磁感应强度;

(2) 求在中心区域产生最接近于均匀磁场时 L 和 a 的关系.

解:

(1) 单个线圈在轴线上产生的磁场为

$$B(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2[a^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}}.$$

两线圈叠加后的总场为

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{[a^2 + (z - L)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[a^2 + (z + L)^2]^{3/2}} \right\}.$$

(2) 为了使中心区域场最均匀, 要求在 $z = 0$ 处

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = 0.$$

代入 $z = 0$ 进行二阶导数计算, 化简得到

$$5L^2 = L^2 + a^2,$$

即

$$L = \frac{1}{2}a.$$

此时两线圈距离为线圈半径 a (即亥姆霍兹线圈).

7. 半径为 a 的无限长圆柱导体上有恒定电流 $\mathbf{J}$ 均匀分布于截面上, 试解矢势 $\mathbf{A}$ 的微分方程, 设导体磁导率为 μ_0 , 导体外磁导率为 μ .

解:

选取柱坐标系, 该问题具有轴对称性, 解与 z 无关. 矢势 $\mathbf{A}$ 仅有 r 分量. 定解问题为:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_{in}}{dr} \right) = -\mu_0 J, & r < a, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_{out}}{dr} \right) = 0, & r > a. \end{cases}$$

积分并利用 $r = 0$ 处有限及边界条件 (A 连续, $\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial r}$ 连续), 解得:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{in} = \frac{1}{4} \mu_0 J (a^2 - r^2) \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{A}_{out} = \frac{\mu}{2} J a^2 \ln \frac{a}{r} \mathbf{e}_z. \end{cases}$$

(此处设 $r = a$ 处 $A = 0$ 为参考点) .

8. 假设存在磁单极子, 其磁荷为 Q_m , 它的磁场强度为

$$\mathbf{H} = \frac{Q_m}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

给出它的矢势 $\mathbf{A}$ 的一个可能表达式, 并讨论它的奇异性.

解:

磁单极子的磁场为

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{Q_m}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

由 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, 在球坐标下, 令 $A_r = A_\theta = 0$, 解得:

$$A_\phi = \frac{Q_m}{4\pi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta}$$

即

$$\mathbf{A} = \frac{Q_m}{4\pi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi.$$

- 当 $\theta \rightarrow 0$ 时, 利用半角公式可知 $\mathbf{A} \rightarrow 0$.
- 当 $\theta \rightarrow \pi$ 时, $1 - \cos \theta \rightarrow 2$ 而 $\sin \theta \rightarrow 0$, 导致 $\mathbf{A} \rightarrow \infty$. 故该表达式在 $\theta = \pi$ 处 (负 z 轴) 具有奇异性, 这被称为“狄拉克弦”(Dirac string).

9. 将一磁导率为 μ , 半径为 R_0 的球体放入均匀磁场 $\mathbf{H}_0$ 内, 求总磁感应强度 $\mathbf{B}$ 和诱导磁矩 $\mathbf{m}$.

解:

以球心为原点建立球坐标, 取 $\mathbf{H}_0$ 方向为 z 轴. 设球内外磁势分别为 φ_{m1} 和 φ_{m2} , 它们满足拉普拉斯方程.

根据边界条件

$$\begin{cases} \varphi_{m1}|_{R=R_0} = \varphi_{m2}|_{R=R_0}, \\ \mu \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial R} \Big|_{R=R_0} = \mu_0 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial R} \Big|_{R=R_0}, \\ \varphi_{m2}|_{R \rightarrow \infty} \rightarrow -H_0 R \cos \theta. \end{cases}$$

解得电势分布后, 得到磁感应强度:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{3\mu\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{H}_0, & R < R_0 \\ \mu_0 \mathbf{H}_0 + \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mu_0 R_0^3 \left[\frac{3(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{H}_0}{R^3} \right], & R > R_0 \end{cases}$$

球外场第二项可视为磁偶极子产生的场, 由此得诱导磁矩为:

$$\mathbf{m} = 4\pi \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} R_0^3 \mathbf{H}_0$$

10. 有一个内外半径为 R_1 和 R_2 的空心球, 位于均匀外磁场 $\mathbf{H}_0$ 内, 球的磁导率为 μ , 求空腔内的场 $\mathbf{B}$, 讨论 $\mu \gg \mu_0$ 时的磁屏蔽作用.

解:

外场均匀且无自由电流, 三块区域都可引入磁标势

$$\mathbf{H} = -\nabla\Phi, \quad \nabla^2\Phi = 0.$$

取 $\mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{e}_z$, 问题轴对称, 仅保留 $l = 1$ 项, 故可设

$$\Phi_1 = -AR \cos \theta, \quad (R < R_1)$$

$$\Phi_2 = -\left(BR + \frac{C}{R^2}\right) \cos \theta, \quad (R_1 < R < R_2)$$

$$\Phi_3 = -H_0 R \cos \theta + \frac{D}{R^2} \cos \theta, \quad (R > R_2).$$

由

$$H_R = -\frac{\partial \Phi}{\partial R}, \quad H_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$

得 (对 $\Phi = -(pR + q/R^2) \cos \theta$)

$$H_R = \left(p - \frac{2q}{R^3}\right) \cos \theta, \quad H_\theta = -\left(p + \frac{q}{R^3}\right) \sin \theta.$$

在 $R = R_1$ 与 $R = R_2$ 处, 因无自由面电流, 边界条件为

$$H_\theta \text{ 连续}, \quad B_R \text{ 连续}.$$

于是得到方程组

$$\begin{cases} A = B + \frac{C}{R_1^3}, \\ \mu_0 A = \mu \left(B - \frac{2C}{R_1^3}\right), \\ B + \frac{C}{R_2^3} = H_0 + \frac{D}{R_2^3}, \\ \mu \left(B - \frac{2C}{R_2^3}\right) = \mu_0 \left(H_0 - \frac{2D}{R_2^3}\right). \end{cases}$$

联立求解可得

$$A = \frac{9\mu\mu_0}{(\mu + 2\mu_0)(2\mu + \mu_0) - 2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 (\mu - \mu_0)^2} H_0.$$

空腔中为真空, 故

$$\mathbf{B}_{\text{cav}} = \mu_0 \mathbf{H}_{\text{cav}} = \mu_0 A \mathbf{e}_z,$$

即

$$\mathbf{B}_{\text{cav}} = \left[1 - \frac{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3}{\frac{(\mu + 2\mu_0)(2\mu + \mu_0)}{2(\mu - \mu_0)^2} - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3} \right] \mu_0 \mathbf{H}_0.$$

当 $\mu \gg \mu_0$ 时,

$$\frac{B_{\text{cav}}}{\mu_0 H_0} \approx \frac{\frac{9}{2}(\mu_0/\mu)}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3} \ll 1,$$

故

$$\mathbf{B}_{\text{cav}} \approx 0.$$

因此高磁导率球壳具有明显磁屏蔽作用, 且壳越厚 (R_1/R_2 越小) 屏蔽越强.

11. 设理想铁磁体的磁化规律为 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_0$, $\mathbf{M}_0$ 是恒定量. 将该铁磁体做成均匀磁化球 (半径 R_0) 浸入磁导率为 μ' 的无限介质中, 求磁感应强度和磁化电流分布.

解:

以 $\mathbf{M}_0$ 方向为 z 轴建立球坐标, 并记 $\mathbf{M}_0 = M_0 \mathbf{e}_z$. 在球内外都没有自由电流, 所以可以引入磁标势

$$\mathbf{H} = -\nabla \Phi_m, \quad \nabla^2 \Phi_m = 0.$$

由于问题只有 $l = 1$ 项, 设

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -AR \cos \theta, & (R < R_0) \\ \Phi_2 &= -\frac{C}{R^2} \cos \theta, & (R > R_0). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= A \cos \theta \mathbf{e}_R - A \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{H}_2 &= -\frac{2C \cos \theta}{R^3} \mathbf{e}_R - \frac{C \sin \theta}{R^3} \mathbf{e}_\theta. \end{aligned}$$

在 $R = R_0$ 处, 因无自由面电流, 有

$$H_{1\theta} = H_{2\theta}, \quad B_{1R} = B_{2R}.$$

由切向分量连续得

$$A = \frac{C}{R_0^3},$$

由法向分量连续得

$$\mu A + \mu_0 M_0 = -\frac{2\mu' C}{R_0^3}.$$

联立可得

$$A = -\frac{\mu_0 M_0}{\mu + 2\mu'}, \quad C = -\frac{\mu_0 M_0 R_0^3}{\mu + 2\mu'}.$$

因此磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{2\mu'\mu_0}{\mu + 2\mu'} \mathbf{M}_0, & R < R_0 \\ \frac{\mu'\mu_0 R_0^3}{\mu + 2\mu'} \left[\frac{3(\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{M}_0}{R^3} \right], & R > R_0 \end{cases}$$

球外项是一个磁偶极场, 因此可把它写成等效磁矩的形式. 若再由

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H}$$

求出球内等效磁化强度, 则表面磁化电流密度为

$$\boldsymbol{\alpha}_M = -\frac{3\mu'}{2\mu' + \mu} M_0 \sin \theta \mathbf{e}_\varphi.$$

12. 将上题的永磁球置入均匀外磁场 $\mathbf{H}_0$ 中, 结果如何?

解:

设外场 $\mathbf{H}_0$ 与 $\mathbf{M}_0$ 同向. 由于本题仍是线性定解问题, 所以可以把解分解成两部分: 一部分是“均匀磁场作用下的均匀磁化球”, 另一部分是“上题的永磁球在无外场时的解”, 然后直接相加.

先看球内场. 由第 9 题的结果, 均匀外场 $\mathbf{H}_0$ 使球内产生

$$\mathbf{B}_H = \frac{3\mu\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{H}_0.$$

再由第 11 题的结果, 永磁化项 $\mathbf{M}_0$ 贡献

$$\mathbf{B}_M = \frac{2\mu_0^2}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{M}_0.$$

叠加得到球内磁感应强度

$$\mathbf{B}_1 = \frac{3\mu\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{H}_0 + \frac{2\mu_0^2}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{M}_0, \quad (R < R_0).$$

球外区域仍然是“均匀场 + 偶极场”的叠加. 因而可把外部磁场写成

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{H}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R} - R^2 \mathbf{m}}{R^5},$$

其中等效磁矩由两部分组成: 一部分来自永磁球, 另一部分来自外场诱导极化, 故

$$\mathbf{m} = \frac{\mu_0 \mathbf{M}_0 R_0^3}{\mu + 2\mu_0} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} R_0^3 \mathbf{H}_0.$$

13. 有一个均匀带点的薄导体壳, 其半径为 R_0 , 总电荷为 Q , 今使球壳绕自身某一直径以角速度 ω 转动, 求球内外的磁场 $\mathbf{B}$.

解:

球面电荷密度为

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}.$$

球壳以角速度 ω 转动时, 半径 R 处的切向速度为

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

故表面电流密度

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v} = \frac{Q\omega \sin \theta}{4\pi R} \mathbf{e}_\varphi.$$

这个电流分布正是“均匀磁化球”表面束缚电流的标准形式，因此可把它等效为一个沿 ω 方向、磁化强度大小为

$$M = \sigma\omega R = \frac{Q\omega}{4\pi R}$$

的均匀磁化球。

对于均匀磁化球，球内磁场均匀，且

$$\mathbf{B}_1 = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M} = \frac{\mu_0 Q}{6\pi R}\omega.$$

球外磁场等效为磁偶极场，其磁矩为

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi R^3}{3}\mathbf{M} = \frac{QR^2}{3}\omega.$$

因此球外磁场就是该磁矩产生的偶极场。

14. 电荷按体均匀分布的刚性小球，其总电荷为 Q ，半径为 R_0 ，它以角速度 ω 绕自身某一直径转动。求：

(1) 它的磁矩；

(2) 它的磁矩与自转动量矩之比（设质量 M_0 是均匀分布的）。

解：

(1) 磁矩

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x} \times \mathbf{j} dV.$$

球内体电荷密度为

$$\rho_e = \frac{3Q}{4\pi R_0^3}.$$

刚体转动时，电流密度为

$$\mathbf{j} = \rho_e(\omega \times \mathbf{r}).$$

因此

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\rho_e \int \mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}) dV.$$

用恒等式

$$\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}) = \omega r^2 - \mathbf{r}(\omega \cdot \mathbf{r})$$

并利用球对称性

$$\int r_i r_j dV = \frac{\delta_{ij}}{3} \int r^2 dV,$$

可得

$$\mathbf{m} = \frac{QR_0^2}{5}\omega.$$

(2) 自转动量矩为

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} = \frac{2M_0 R_0^2}{5} \boldsymbol{\omega}.$$

两者之比为

$$\frac{m}{L} = \frac{Q}{2M_0}.$$

15. 有一磁矩为 $\mathbf{m}$ 的小永磁体，位于一块磁导率非常大的实物的平坦界面附近的真空中，求作用在永磁体上的力 $\mathbf{F}$.

解：

设界面为 $z = 0$ 平面，永磁体位于真空侧 $z = a$. 当介质磁导率趋于无穷大时，界面上磁场满足切向 $\mathbf{H}$ 近似为零，因此可以用镜像法处理：在 $z = -a$ 处放置一个镜像磁矩 $\mathbf{m}'$.

把原磁矩分解为垂直和平行于界面的两部分，记 $\mathbf{m} = \mathbf{m}_{\parallel} + \mathbf{m}_{\perp}$. 为满足边界条件，镜像磁矩取为

$$\mathbf{m}' = \mathbf{m}_{\parallel} - \mathbf{m}_{\perp}.$$

这样，原磁体处的磁场就等效为“原磁体与镜像磁体”相互作用所产生的场. 两个磁偶极子之间的相互作用能为

$$U = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}' - 3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{z}})(\mathbf{m}' \cdot \hat{\mathbf{z}})}{(2a)^3},$$

但由于这里只取半空间中的物理场，能量还要再乘以 1/2.

设 α 为 $\mathbf{m}$ 与界面法线 $\mathbf{e}_z$ 的夹角，则

$$\mathbf{m}_{\perp} = m \cos \alpha \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{m}_{\parallel} = m \sin \alpha.$$

代入上式可得势能

$$U = -\frac{\mu_0 m^2}{64\pi a^3} (1 + \cos^2 \alpha).$$

于是力沿法线方向，且

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial a} \mathbf{e}_z = -\frac{3\mu_0 m^2}{64\pi a^4} (1 + \cos^2 \alpha) \mathbf{e}_z.$$

其方向指向界面，说明高磁导率平面会吸引附近的永磁体.

Chapter 4

电磁波的传播

1. 考虑两列振幅相同的、偏振方向相同、频率分别为 $\omega + d\omega$ 和 $\omega - d\omega$ 的线偏振平面波，它们都沿 z 轴方向传播.

(1) 求合成波，证明波的振幅不是常数，而是一个波.

(2) 求合成波的相位传播速度和振幅传播速度.

解：(1) 设两列波的电场强度分别为：

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(k_1 z - \omega_1 t)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(k_2 z - \omega_2 t)$$

合成波为两者的叠加：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 [\cos(k_1 z - \omega_1 t) + \cos(k_2 z - \omega_2 t)]$$

利用和差化积公式展开得：

$$\mathbf{E} = 2\mathbf{E}_0 \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}z - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}z - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

其中 $k_1 = k + dk, k_2 = k - dk; \omega_1 = \omega + d\omega, \omega_2 = \omega - d\omega$. 代入上式得：

$$\mathbf{E} = 2\mathbf{E}_0 \cos(kz - \omega t) \cos(dk \cdot z - d\omega \cdot t)$$

由此可见，合成波的振幅为 $2\mathbf{E}_0 \cos(dk \cdot z - d\omega \cdot t)$ ，它随空间和时间作慢变调制，因此振幅不是常数，而是一个行进的振幅波.

(2) 相位传播速度（相速）由等相位面 $kz - \omega t = \text{常数}$ 决定：

$$v_p = \frac{\omega}{k}$$

振幅传播速度（群速）由等振幅面 $dk \cdot z - d\omega \cdot t = \text{常数}$ 决定：

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

2. 一平面电磁波以 $\theta = 45^\circ$ 从真空入射到 $\epsilon_r = 2$ 的介质，电场强度垂直于入射面，求反射系数和折射系数。

解： 设 $\mathbf{n}$ 为界面法向单位矢量. 反射系数 R 和折射系数 T 定义为反射波和折射波与入射波的平均坡印廷矢量法向分量之比：

$$R = \left| \frac{\langle \mathbf{S}' \rangle \cdot \mathbf{n}}{\langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{n}} \right| = \frac{E_0'^2}{E_0^2}, \quad T = \left| \frac{\langle \mathbf{S}'' \rangle \cdot \mathbf{n}}{\langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{n}} \right| = \frac{n_2 \cos \theta_2 E_0''^2}{n_1 \cos \theta E_0^2}$$

根据电场强度垂直于入射面（ s 偏振）的非涅耳公式，可得：

$$R = \left(\frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta - \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_2}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_2} \right)^2, \quad T = \frac{4\sqrt{\epsilon_1} \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta \cos \theta_2}{(\sqrt{\epsilon_1} \cos \theta + \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_2)^2}$$

由折射定律，有 $\sqrt{\epsilon_2} \sin \theta_2 = \sqrt{\epsilon_1} \sin \theta$. 由题意知，真空 $\epsilon_1 = \epsilon_0$ ，介质 $\epsilon_2 = \epsilon_0 \epsilon_r = 2\epsilon_0$ ，入射角 $\theta = 45^\circ$.

$$\sin \theta_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \implies \theta_2 = 30^\circ$$

将 $\theta = 45^\circ$ 和 $\theta_2 = 30^\circ$ 代入菲涅耳公式中：

$$R = \left(\frac{\cos 45^\circ - \sqrt{2} \cos 30^\circ}{\cos 45^\circ + \sqrt{2} \cos 30^\circ} \right)^2 = \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right)^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

$$T = \frac{4 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cos 45^\circ \cos 30^\circ}{(\cos 45^\circ + \sqrt{2} \cos 30^\circ)^2} = \frac{4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

3. 有一可见平面光波由水入射到空气，入射角为 60° . 证明这时将会发生全反射，并求折射波沿表面传播的相速度和透入空气的深度. 设该波在空气中的波长为 $\lambda_0 = 6.28 \times 10^{-5} \text{ cm}$ ，水的折射率为 $n = 1.33$.

解：由折射定律，光从光密介质（水）入射到光疏介质（空气）的临界角为：

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1.33}\right) \approx 48.75^\circ$$

因为当前入射角 $\theta = 60^\circ > \theta_c$ ，所以必定会发生全反射. 折射波沿分界面切向（设为 x 方向）的波矢连续，即 $k_x = k \sin \theta = \frac{n\omega}{c} \sin \theta$. 折射波沿表面传播的相速度为：

$$v_p = \frac{\omega}{k_x} = \frac{c}{n \sin \theta} = \frac{c}{1.33 \times \sin 60^\circ} = \frac{c}{1.33 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0.87c$$

透入空气中的穿透深度（场强衰减到 $\frac{1}{e}$ 的距离）为：

$$d = \frac{\lambda_0}{2\pi\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}} = \frac{6.28 \times 10^{-5} \text{ cm}}{2\pi\sqrt{1.33^2 \sin^2 60^\circ - 1}} \approx 1.7 \times 10^{-5} \text{ cm}$$

4. 频率为 ω 的电磁波在各向同性介质中传播时，若 $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ 仍按 $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ 变化，但 $\mathbf{D}$ 不再与 $\mathbf{E}$ 平行（即 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 不成立）.

(1) 证明 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = 0$ ，但在一般 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \neq 0$ ；

(2) 证明 $\mathbf{D} = \frac{1}{\omega^2 \mu} [k^2 \mathbf{E} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k}]$ ；

(3) 证明能流 $\mathbf{S}$ 与波矢 $\mathbf{k}$ 一般不在同方向上.

证明：(1) 在平面波源下，微分算符满足 $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ ， $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$. 由麦克斯韦方程组的无源形式：

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \implies i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \implies \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \implies i\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \implies \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0$$

由旋度方程 $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 可得 $i\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D}$ ，即 $\mathbf{D} = -\frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{B}$. 因此：

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{D} = -\frac{1}{\mu\omega} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{B}) = 0$$

由旋度方程 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 可得 $i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}$, 即 $\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}$. 因此:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} = 0$$

由于介质中 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{E}$ 不再平行, 而 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0$, 这表明 $\mathbf{E}$ 不能与 $\mathbf{D}$ 处于同一方向上, 故在一般情况下 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \neq 0$.

(2) 将 $\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E})$ 代入 $\mathbf{D} = -\frac{1}{\mu\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{B})$ 中, 利用矢量三重积公式展开:

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{\mu\omega^2} [\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})] = \frac{1}{\mu\omega^2} [(\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{k}] = \frac{1}{\omega^2 \mu} [k^2 \mathbf{E} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k}]$$

(3) 坡印廷能流矢量为:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{E} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{\mu\omega} [E^2 \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}]$$

由于前面已证 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \neq 0$, 导致能流式中存在正比于 $\mathbf{E}$ 的偏置分量, 因此能流 $\mathbf{S}$ 一般不与波矢 $\mathbf{k}$ 同向.

5. 有两个频率和振幅都相等的单色平面波沿 z 轴传播, 一个波沿 x 方向偏振, 另一个沿 y 方向偏振, 但相位比前者超前 $\frac{\pi}{2}$, 求合成波的偏振.

反之, 一个圆偏振可以分解为怎样的两个线偏振?

解: 根据题意, 沿 x 轴偏振的平面波可记为:

$$E_x = A_0 \cos(\omega t - kz)$$

沿 y 轴偏振且相位超前 $\frac{\pi}{2}$ 的平面波可记为:

$$E_y = A_0 \cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}\right) = -A_0 \sin(\omega t - kz)$$

两分量平方相加消去时间参数, 可得合成波的运动轨迹方程为:

$$E_x^2 + E_y^2 = A_0^2 [\cos^2(\omega t - kz) + \sin^2(\omega t - kz)] = A_0^2$$

这是一个圆形方程. 迎着波的传播方向 (沿 $+z$ 轴看去) 观察, 电场矢量随时间沿逆时针方向旋转, 因此合成波是沿 z 轴传播的右旋圆偏振波.

反之, 一个圆偏振波可以唯一地分解为两个偏振方向相互垂直、振幅相等、频率相同且相位差为 $\frac{\pi}{2}$ 的线偏振波.

6. 平面电磁波垂直照射到金属表面上, 试证明透入金属内部的电磁波能量全部变为焦耳热.

证明: 设 $z > 0$ 的半空间为金属导体, 平面电磁波自真空 ($z < 0$) 垂直入射至导体表面 ($z = 0$). 透入金属内部的电磁波电场可表示为:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(\beta z - \omega t)}$$

根据麦克斯韦方程可得对应的磁场强度为:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega \mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{1}{\omega \mu} (\beta + i\alpha) \mathbf{n} \times \mathbf{E}$$

在 $z = 0$ 表面上, 单位面积进入导体的平均能流 (坡印廷矢量的平均值) 为:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{\beta}{2\omega\mu} E_0^2$$

在导体内部, 由于存在电导率 σ , 传导电流密度为 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. 整个金属体内单位截面积消耗的总平均焦耳热功率可以通过对空间积分求得:

$$Q = \int_0^\infty \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) dz = \frac{1}{2} \sigma E_0^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha z} dz = \frac{\sigma}{4\alpha} E_0^2$$

利用导体中的色散特征关系: $\alpha\beta = \frac{\omega\mu\sigma}{2}$, 可将上式化简为:

$$Q = \frac{\sigma}{4\alpha} E_0^2 = \frac{\beta}{2\omega\mu} E_0^2$$

由此可见 $Q = \bar{S}$, 即垂直进入金属内部的电磁能量完全转化为了金属内的焦耳热损耗, 原题得证.

7. 已知海水的 $\mu_r = 1, \sigma = 1 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, 试计算频率为 50 Hz, 10^6 Hz 和 10^9 Hz 的三种电磁波在海水中的透入深度.

解: 电磁波垂直透射进入导电介质时的透入深度 (趋肤深度) 公式为:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

其中海水的磁导率为真空磁导率 $\mu = \mu_0 \mu_r = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$, 电导率 $\sigma = 1 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

1) 当频率 $\nu = 50 \text{ Hz}$ 时, 角频率 $\omega = 2\pi\nu = 100\pi \text{ rad/s}$:

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{2}{100\pi \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1}} \approx 72 \text{ m}$$

2) 当频率 $\nu = 10^6$ Hz 时, 角频率 $\omega = 2\pi \times 10^6$ rad/s:

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{2}{2\pi \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1}} \approx 0.5 \text{ m}$$

3) 当频率 $\nu = 10^9$ Hz 时, 角频率 $\omega = 2\pi \times 10^9$ rad/s:

$$\delta_3 = \sqrt{\frac{2}{2\pi \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1}} \approx 16 \text{ mm}$$

8. 平面电磁波由真空倾斜入射到导电介质表面上, 入射角为 θ_1 , 求导电介质中电磁波的相速度和衰减长度. 若导电介质为金属, 结果如何?

解: 设入射面为 xz 平面, 分界面为 $z = 0$. 导电介质 ($z > 0$) 中的电磁波可表示为 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha \cdot \mathbf{x}} e^{i(\beta \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$, 其复波矢为 $\mathbf{k}'' = \boldsymbol{\beta} + i\boldsymbol{\alpha}$. 根据分界面相位匹配条件, 切向波矢必须连续:

$$k_x'' = \beta_x + i\alpha_x = k_x = \frac{\omega}{c} \sin \theta_1$$

由于入射波矢切向分量为实数, 故有 $\alpha_x = 0$, $\beta_x = \frac{\omega}{c} \sin \theta_1$. 而在 xz 入射面内传播意味着无 y 方向分量 ($\alpha_y = 0, \beta_y = 0$). 因此, 衰减矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 只有 z 分量, 即 $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_z \mathbf{e}_z$, 说明波在垂直于界面方向衰减. 由介质中的麦克斯韦方程, 复波矢满足:

$$\beta^2 - \alpha^2 = \beta_x^2 + \beta_z^2 - \alpha_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \alpha_z \beta_z = \frac{1}{2} \omega \mu \sigma$$

代入并联立求解可得两分量表达式:

$$\beta_z^2 = \frac{1}{2} \left(\mu \epsilon \omega^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta_1 \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta_1 - \omega^2 \mu \epsilon \right)^2 + \omega^2 \mu^2 \sigma^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha_z^2 = -\frac{1}{2} \left(\mu \epsilon \omega^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta_1 \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\omega^2 \mu \epsilon - \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta_1 \right)^2 + \omega^2 \mu^2 \sigma^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

合成总传播常数为 $\beta = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_z^2}$, 则在导电介质中的相速度为:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta_1 + \beta_z^2}}$$

衰减长度（空间振幅减弱到 $\frac{1}{e}$ 的距离）为：

$$d = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_z}$$

若该介质为良导体金属，满足 $\sigma \gg \omega\epsilon$ ，此时上述根式中的 $\omega^2\mu^2\sigma^2$ 占绝对主导项，因此可以近似化简为：

$$\beta_z \approx \alpha_z \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

由于金属内 $\beta_z \gg \beta_x$ ，电磁波在金属内几乎垂直于界面传播。此时相速度和衰减长度分别简化为：

$$v \approx \frac{\omega}{\beta_z} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}, \quad d \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

9. 无限长的矩形波导管，在 $z = 0$ 处被一块垂直地插入地理想导体平板完全封闭，求在 $z = -\infty$ 到 $z = 0$ 这段管内可能存在的波模。

解：在此种结构得波导管中，电磁波的传播依旧满足亥姆霍兹方程：

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \\ k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \end{cases}$$

方程的通解为：

$$E_i(x, y, z) = (C_1 \sin k_x x + D_1 \cos k_x x)(C_2 \sin k_y y + D_2 \cos k_y y)(C_3 \sin k_z z + D_3 \cos k_z z)$$

根据理想导体平板的边界条件，切向电场在边界上为零：

$$\begin{aligned} E_y = E_z = 0 \quad (x = 0, a), \quad E_x = E_z = 0 \quad (y = 0, b) \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad (x = 0, a), \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (y = 0, b), \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (z = 0) \end{aligned}$$

由此定解可得：

$$\begin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \\ E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \\ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \end{cases}$$

其中, $k_x = \frac{m\pi}{a}$ ($m = 0, 1, 2 \dots$), $k_y = \frac{n\pi}{b}$ ($n = 0, 1, 2 \dots$), 且展开系数间满足:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad A_1 \frac{m\pi}{a} + A_2 \frac{n\pi}{b} + A_3 k_z = 0$$

上式即为该段波导管中所有可能存在的电磁波模式解.

10. 电磁波 $\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y)e^{i(k_z z - \omega t)}$ 在波导管中沿 z 方向传播, 试使用 $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}$ 与 $\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}$ 证明电磁场所有分量都可用 $E_z(x, y)$ 与 $H_z(x, y)$ 这两个分量表示.

证明: 沿 z 轴传播的电磁波, 其电场和磁场可写作:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y)e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad \mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}(x, y)e^{i(k_z z - \omega t)}$$

将算符展开, 由麦氏方程组写成分量式:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - ik_z E_y = i\omega\mu_0 H_x \quad \text{--- (1)}$$

$$ik_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega\mu_0 H_y \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega\mu_0 H_z \quad \text{--- (3)}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - ik_z H_y = -i\omega\epsilon_0 E_x \quad \text{--- (4)}$$

$$ik_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\omega\epsilon_0 E_y \quad \text{--- (5)}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -i\omega\epsilon_0 E_z \quad \text{--- (6)}$$

由方程 (2) 和 (4) 联立消去 H_y 得:

$$E_x = \frac{1}{i \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right)} \left(-\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} - k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

由方程 (1) 和 (5) 联立消去 H_x 得:

$$E_y = \frac{1}{i \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right)} \left(\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} - k_z \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

由方程 (1) 和 (5) 联立消去 E_y 得:

$$H_x = \frac{1}{i \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right)} \left(-k_z \frac{\partial H_z}{\partial x} + \omega \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

由方程 (2) 和 (4) 联立消去 E_x 得:

$$H_y = \frac{1}{i \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right)} \left(-k_z \frac{\partial H_z}{\partial y} - \omega \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

由上可见, 横向分量 E_x, E_y, H_x, H_y 都可以完全由纵向分量 E_z 和 H_z 及其空间微商线性表示, 证毕.

11. 写出矩形波导管内磁场 $\mathbf{H}$ 满足的方程及边界条件.

解: 对于定态波, 磁场可表示为 $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$. 由麦氏方程组:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -i\omega \epsilon \mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

对第一式两边取旋度, 得 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H} = -i\omega \epsilon \nabla \times \mathbf{E}$.

将 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\omega \mu \mathbf{H}$ 代入上式可得:

$$-\nabla^2 \mathbf{H} = \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{H} \implies (\nabla^2 + k^2) \mathbf{H} = 0$$

其中 $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$. 故管内磁场满足的波动方程为:

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k^2) \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases}$$

边界条件: 由理想导体表面 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$ 得 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0$, 即法向分量满足 $H_n = 0$. 再利用 $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}$ 和电场切向连续的边界条件, 可推得切向分量满足 $\frac{\partial H_t}{\partial n} = 0$. 综上, 磁场的边界条件为:

$$\begin{cases} H_n = 0 \\ \frac{\partial H_t}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

12. 论证矩形波导管内不存在 TM_{m0} 或 TM_{0n} 波.

证明: 已知波导管中的电场 $\mathbf{E}$ 展开形式满足:

$$\begin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \\ E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z} \\ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{ik_z z} \end{cases}$$

由关系式 $\mathbf{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}$ 可求得纵向磁场分量为:

$$H_z = -\frac{i}{\omega\mu} (A_2 k_x - A_1 k_y) \cos k_x x \cos k_y y e^{ik_z z}$$

由于本题讨论 TM 波, 其纵向磁场必须严格为零 ($H_z = 0$), 即要求系数满足 $A_2 k_x - A_1 k_y = 0$.

1) 若 $n = 0$, 则 $k_y = \frac{n\pi}{b} = 0$, 代入约束式得 $A_2 k_x = 0$.

考虑到传播的有意义电磁场模式, 即 $k_x = \frac{m\pi}{a} \neq 0$, 则必须有 $A_2 = 0$.

将 $A_2 = 0, k_y = 0$ 代入磁场其余横向分量公式中, 算得 $H_x = H_y = 0$.

2) 若 $m = 0$, 则 $k_x = \frac{m\pi}{a} = 0$, 代入约束式得 $A_1 k_y = 0$.

同理, 由于 $k_y = \frac{n\pi}{b} \neq 0$, 必须有 $A_1 = 0$. 代入算得 $H_x = H_y = 0$.

由于在这两种情况下横向磁场也同时消失, 波将无法传播, 因此矩形波导中不可能存在 TM_{m0} 和 TM_{0n} 模式的波.

13. 频率为 30×10^9 Hz 的微波, 在 $0.7 \text{ cm} \times 0.4 \text{ cm}$ 的矩形波导管中能以什么波模传播? 在 $0.7 \text{ cm} \times 0.6 \text{ cm}$ 的矩形波导管中能以什么波模传播?

解: 矩形波导管各模式的截止频率公式为: $\nu_c = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$.

工作频率 $\nu = 30 \times 10^9 \text{ Hz} = 3.0 \times 10^{10} \text{ Hz}$.

1) 当波导截面尺寸为 $a = 0.7 \text{ cm}, b = 0.4 \text{ cm}$ 时:

若 $m = 1, n = 0$, 计算得 $\nu_c \approx 2.1 \times 10^{10} \text{ Hz}$;

若 $m = 0, n = 1$, 计算得 $\nu_c \approx 3.7 \times 10^{10} \text{ Hz}$;

若 $m = 1, n = 1$, 计算得 $\nu_c \approx 4.3 \times 10^{10} \text{ Hz}$.

根据传播条件 $\nu > \nu_c$, 仅有 $m = 1, n = 0$ 满足, 因此该微波只能以 TE_{10} 波 (主模) 在其中传播.

2) 当波导截面尺寸为 $a = 0.7 \text{ cm}, b = 0.6 \text{ cm}$ 时:

若 $m = 1, n = 0$, 计算得 $\nu_c \approx 2.1 \times 10^{10} \text{ Hz}$;

若 $m = 0, n = 1$, 计算得 $\nu_c \approx 2.5 \times 10^{10} \text{ Hz}$;

若 $m = 1, n = 1$, 计算得 $\nu_c \approx 3.3 \times 10^{10}$ Hz.

根据传播条件 $\nu > \nu_c$, 此时满足要求的模式有 $m = 1, n = 0$ 和 $m = 0, n = 1$, 因此此波可以以 TE_{10} 和 TE_{01} 两种波模传播.

14. 一对无限大的平行理想导体板, 相距为 b , 电磁波沿平行于板面的 z 方向传播, 设波在 x 方向是均匀的, 求可能传播的波模和每种波模的截止频率.

解: 在两无限大平行板之间传播的电磁波满足亥姆霍兹方程:

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \\ k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \end{cases}$$

令 $U(x, y, z)$ 是 $\mathbf{E}$ 的任意一个直角分量. 由于设波在 x 方向是均匀的 ($\frac{\partial U}{\partial x} = 0$), 故场可写为:

$$U(x, y, z) = U(y, z) = Y(y)Z(z)$$

在 y 方向受金属板边界限制取驻波解, 在无界的 z 方向取行波解, 可得波动方程通解为:

$$U(x, y, z) = (C_1 \sin k_y y + D_1 \cos k_y y) e^{i k_z z}$$

由边界条件 $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ 限制, 可确定各分量的具体特解结构为:

$$\begin{cases} E_x = A_1 \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_y = A_2 \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_z = A_3 \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i(k_z z - \omega t)} \end{cases}$$

其中总波数关系满足 $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k_z^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). 代入无源高斯定理 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 可得约束关系: A_1 独立, 且 $\frac{n\pi}{b} A_2 = i k_z A_3$. 令传播矢量减小至临界临界值 $k_z = 0$, 即可求得截止频率为:

$$\omega_c = \frac{n\pi c}{b}$$

15. 证明整个谐振腔内的电场能量和磁场能量对时间的平均值总相等.

证明：在理想封闭矩形谐振腔中，时谐电场 $\mathbf{E}$ 表现为三维驻波，空间分布为：

$$\begin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \\ E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \\ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \end{cases} e^{-i\omega t}$$

根据关系式 $\mathbf{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}$ ，可求得其对应的磁场各空间分量表达式为：

$$H_x = -\frac{i}{\omega\mu} (A_3 k_y - A_2 k_z) \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z e^{-i\omega t}$$

$$H_y = -\frac{i}{\omega\mu} (A_1 k_z - A_3 k_x) \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z e^{-i\omega t}$$

$$H_z = -\frac{i}{\omega\mu} (A_2 k_x - A_1 k_y) \cos k_x x \cos k_y y \sin k_z z e^{-i\omega t}$$

其中波矢分量定义为 $k_x = \frac{m\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b}, k_z = \frac{p\pi}{c}$ (m, n, p 为整数)，且 $A_1 k_x + A_2 k_y + A_3 k_z = 0$.

1) 谐振腔中电场能量对时间的平均值为：

$$\bar{W}_E = \int_V \bar{\omega}_E dV = \frac{\epsilon}{4} \iiint_0^a \int_0^b \int_0^c (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) dx dy dz = \frac{abc\epsilon}{32} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)$$

2) 谐振腔中磁场能量的时间平均值为：

$$\bar{W}_B = \int_V \bar{\omega}_B dV = \frac{1}{4\mu\omega^2} \cdot \frac{abc}{8} [(A_3 k_y - A_2 k_z)^2 + (A_1 k_z - A_3 k_x)^2 + (A_2 k_x - A_1 k_y)^2]$$

由于满足关系式 $(A_1 k_x + A_2 k_y + A_3 k_z)^2 = 0$ ，将上式中括号内的各项进行代数完全平方展开、交叉项合并抵消后，可化简整理得：

$$\bar{W}_B = \frac{abc}{32\mu\omega^2} [(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)]$$

将色散特征方程 $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ 代入上式中：

$$\bar{W}_B = \frac{abck^2}{32\mu\omega^2} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) = \frac{abc\epsilon}{32} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)$$

比较两积分化简最终结果，显见 $\bar{W}_E = \bar{W}_B$ ，即全腔内总电场时间平均能量与总磁场时间平均能量严格相等，原命题得证.

Chapter 5

电磁波的辐射

1. 若把麦克斯韦方程组的所有矢量都分解为无旋的（纵场）和无散的（横场）两部分，写出 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的这两部分在真空所满足的方程式，并证明电场的无旋部分对应于库仑场。

解：在真空中的麦克斯韦方程组为：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

将矢量分解为无旋的纵场（角标 L ）和无散的横场（角标 T ），满足：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_T, \quad \nabla \times \mathbf{E}_L = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_T = 0$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_L + \mathbf{J}_T, \quad \nabla \times \mathbf{J}_L = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{J}_T = 0$$

由于 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，说明 $\mathbf{B}$ 是纯横场，即 $\mathbf{B}_L = 0$ ， $\mathbf{B} = \mathbf{B}_T$ 。

代入麦克斯韦方程组，并利用纵、横场的独立性进行分离：1) 由旋度方程 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 得到横场方程：

$$\nabla \times \mathbf{E}_T = -\frac{\partial \mathbf{B}_T}{\partial t}$$

2) 由高斯定理 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ 得到纵场方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_L = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

3) 由全电流定律两边同时取散度或将纵横项分离，可得：横场方程：

$$\nabla \times \mathbf{B}_T = \mu_0 \mathbf{J}_T + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial t}$$

纵场约束关系：

$$\mu_0 \mathbf{J}_L + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t} = 0$$

证明电场的无旋部分对应库仑场：因为 $\mathbf{E}_L$ 无旋 ($\nabla \times \mathbf{E}_L = 0$)，可以引入标势 φ 满足 $\mathbf{E}_L = -\nabla\varphi$ 。代入纵场的散度方程中可得：

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

此方程即为静电场的泊松方程。它的解代表静止电荷在真空中产生的电势分布，因此 $\mathbf{E}_L$ 严格对应于静止电荷产生的库仑场。

2. 证明在线性各向同性均匀非导电介质中，若 $\rho = 0, \mathbf{J} = 0$ ，则 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 可完全由矢势 $\mathbf{A}$ 决定。若取 $\varphi = 0$ ，这时满足哪两个方程？

解：在线性各向同性均匀非导电介质中，由于 $\rho = 0, \mathbf{J} = 0$ ，麦克斯韦方程组化为：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

其中 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$ 。

由 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，引入矢势 $\mathbf{A}$ ，使得 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，因此 $\mathbf{B}$ 完全由 $\mathbf{A}$ 决定。

将此式代入 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ，可得 $\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$ 。

进而可以引入标势 φ ，使得 $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi$ ，即：

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

若取规范条件 $\varphi = 0$ ，则电场强度化为 $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 。

此时将 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{E}$ 的表达式代入其余的麦克斯韦方程中：

1) 代入 $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 得 $\frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$ 。

利用矢量恒等式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ ，化简可得：

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

2) 代入 $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \implies \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 得：

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

在 $\varphi = 0$ 的规范下（此时洛伦兹规范与库仑规范形式退化一致，即 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ），矢势 $\mathbf{A}$ 必须满足的两个方程为：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

3. 证明沿 z 轴方向传播的平面电磁波可用矢势 $\mathbf{A}(\omega\tau)$ 表示, 其中 $\tau = t - \frac{z}{c}$, $\mathbf{A}$ 垂直于 z 轴方向.

证明: 对于沿 z 轴正方向传播的单色线偏振平面电磁波, 其电场和磁场可以表示为:

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_x e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_y e^{i(kz - \omega t)}$$

其中波数 $k = \frac{\omega}{c}$. 为了构建对应的矢势, 不妨假设 $\mathbf{A}$ 只有 x 分量且垂直于 z 轴, 形式为:

$$\mathbf{A} = A_0 \mathbf{e}_x e^{-i\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)} = A_0 \mathbf{e}_x e^{i(kz - \omega t)}$$

验证该矢势产生的电磁场: 磁场:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} \mathbf{e}_y = ik A_0 \mathbf{e}_y e^{i(kz - \omega t)}$$

电场 (在真空中取标势 $\varphi = 0$):

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = i\omega A_0 \mathbf{e}_x e^{i(kz - \omega t)}$$

由此可见, 若令 $B_0 = ik A_0$ 且 $E_0 = i\omega A_0$, 则通过该矢势得到的 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 完全符合沿 z 轴传播的平面电磁波物理特性, 且满足 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_z = 0$. 命题得证.

4. 设真空中矢势 $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ 可用复数傅立叶展开为:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} [\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}]$$

其中 $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*$ 是 $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ 的复共轭.

- (1) 证明 $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ 满足谐振子方程 $\frac{d^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t)}{dt^2} + k^2 c^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) = 0$;
- (2) 当选取规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \varphi = 0$ 时, 证明 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{\mathbf{k}} = 0$;
- (3) 把 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 用 $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ 和 $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*$ 表示出来.

解：(1) 在真空中，由于没有自由电流 ($\mathbf{J} = 0$)，齐次波动方程满足：

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$$

将 $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ 的展开式代入方程中，利用空间拉普拉斯算符对基函数的作用 $\nabla^2 e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = -k^2 e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ ，可得：

$$\sum_k \left[\left(-k^2 \mathbf{a}_k(t) - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \mathbf{a}_k(t)}{dt^2} \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \left(-k^2 \mathbf{a}_k^*(t) - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \mathbf{a}_k^*(t)}{dt^2} \right) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] = 0$$

由于平面波基函数 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ 的线性无关性，其各项系数必须单独为零，移项即得：

$$\frac{d^2 \mathbf{a}_k(t)}{dt^2} + k^2 c^2 \mathbf{a}_k(t) = 0$$

原式得证.

(2) 当选取规范条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 时，对展开式求散度：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \sum_k [i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_k(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_k^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] = 0$$

要使上式对空间任意点处处成立，必须满足各项独立系数为零，即：

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_k = 0$$

(3) 磁感应强度 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ，利用旋度算符计算得：

$$\mathbf{B} = \sum_k [i\mathbf{k} \times \mathbf{a}_k(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - i\mathbf{k} \times \mathbf{a}_k^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]$$

电场强度在 $\varphi = 0$ 时满足 $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ ，直接对时间求偏导得：

$$\mathbf{E} = -\sum_k \left[\frac{d\mathbf{a}_k(t)}{dt} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \frac{d\mathbf{a}_k^*(t)}{dt} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right]$$

5. 设 $\mathbf{A}$ 和 φ 是满足洛伦兹规范的矢势和标势.

(1) 引入一矢量函数 $\mathbf{Z}(\mathbf{x}, t)$ (赫兹矢量)，若令 $\varphi = -\nabla \cdot \mathbf{Z}$ ，证明 $\mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}$ ；

(2) 若令 $\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ ，证明 $\mathbf{Z}$ 满足方程 $\nabla^2 \mathbf{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -c^2 \mu_0 \mathbf{P}$ ，并写出在真空中的推迟解；

(3) 证明 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 可通过 $\mathbf{Z}$ 用下列公式表出:

$$\mathbf{E} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{Z}) - c^2 \mu_0 \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}$$

证明: (1) 矢势与标势满足洛伦兹规范条件: $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$. 将 $\varphi = -\nabla \cdot \mathbf{Z}$ 代入规范条件中:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} \right) = 0$$

因此可以直接取满足上述特解关系的矢量解: $\mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}$.

(2) 标势 φ 满足的达朗贝尔方程为: $\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$. 将 $\varphi = -\nabla \cdot \mathbf{Z}$ 和 $\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ 代入该方程:

$$\nabla^2 (-\nabla \cdot \mathbf{Z}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\frac{-\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

交换空间微分与时间偏导算符的位置可整理为:

$$\nabla \cdot \left(\nabla^2 \mathbf{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right)$$

由于 $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$, 上式移项去掉两边散度算符可得赫兹矢量方程:

$$\nabla^2 \mathbf{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -c^2 \mu_0 \mathbf{P}$$

类比于源电荷的达朗贝尔方程解, 该方程在真空中的推迟势特解为:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}, t) = \frac{c^2 \mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}', t - \frac{r}{c})}{r} dV'$$

(3) 由电场强度公式 $\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, 代入赫兹变量关系:

$$\mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{Z}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2}$$

利用矢量恒等式 $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{Z}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{Z}) + \nabla^2 \mathbf{Z}$ 展开:

$$\mathbf{E} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{Z}) + \left(\nabla^2 \mathbf{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} \right)$$

将第 (2) 步中的波动项整体替换为 $-c^2 \mu_0 \mathbf{P}$, 即得:

$$\mathbf{E} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{Z}) - c^2 \mu_0 \mathbf{P}$$

对于磁场:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}$$

两式均得证.

6. 两个质量、电荷都相同的粒子相向而行发生碰撞，证明电偶极辐射和磁偶极辐射都不会发生.

证明：根据多极辐射场理论，电偶极辐射强度取决于系统总电偶极矩的二阶时间导数 $\ddot{\mathbf{p}}$ ，而磁偶极辐射取决于总磁偶极矩的一阶时间导数 $\dot{\mathbf{m}}$.

取两粒子的运动连线为 x 轴，系统的总电偶极矩为：

$$\mathbf{p} = q\mathbf{x}_1 + q\mathbf{x}_2 = q(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$$

对其求二阶时间导数：

$$\ddot{\mathbf{p}} = q(\ddot{\mathbf{x}}_1 + \ddot{\mathbf{x}}_2)$$

由于两粒子的质量 m_0 和电量 q 完全相同，在相向碰撞的相互作用过程中，其加速度始终满足 $\ddot{\mathbf{x}}_1 = -\ddot{\mathbf{x}}_2$. 代入上式即得 $\ddot{\mathbf{p}} = 0$ ，故不发生电偶极辐射. 系统的总磁偶极矩 $\mathbf{m}$ 定义为：

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} q(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{v}_1 + \mathbf{x}_2 \times \mathbf{v}_2)$$

因为两粒子均限制在 x 轴这一直线上相向运动，其各自的位置矢量 $\mathbf{x}$ 与速度矢量 $\mathbf{v}$ 始终共线，两者的叉乘严格为零（即 $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{v}_1 = 0, \mathbf{x}_2 \times \mathbf{v}_2 = 0$ ）. 因此系统的总磁偶极矩 $\mathbf{m} = 0$ ，从而其时间变化率 $\dot{\mathbf{m}} = 0$ ，故磁偶极辐射也不会发生.

7. 设有一个球对称的电荷分布，以频率沿径向做简谐振动，求辐射场，并对结果给以物理解释.

解：该系统的总辐射场为零. 以下分别从数学展开与物理机制两个角度给予解释：

1) **多极展开角度：**

由于电荷分布具有完备的球对称性，我们在球面上任取两块相对、对应相同立体角的对称小面元 dS_1 和 dS_2 . 它们所带的电荷量相等（ $\Delta Q_1 = \Delta Q_2$ ），且以相同的频率沿径向做简谐振动.

这两块对称电荷元合成的电偶极矩为：

$$\mathbf{p} = \Delta Q_1 \cdot R\mathbf{e}_r + \Delta Q_2 \cdot R(-\mathbf{e}_r) = 0$$

由于任意对称方向的偶极矩都完全抵消，整个系统的总电偶极矩 $\mathbf{p} = 0$. 同理，由于电荷运动严格沿径向，无切向环流，其总磁偶极矩 $\mathbf{m} = I d\mathbf{S} = 0$. 由多极场的叠加原理，其各阶辐射电磁场分量均为零.

2) **物理机制解释：**

从根本上说，电荷沿径向的对称振荡并没有破坏电场的球对称几何特征. 根据高斯定理，在球壳外部任意切面构成的封闭曲面上，总电通量只取决于内部的总电荷量 Q .

由于总电荷量恒定，球外的电场在任何时刻都等同于一个静止点电荷产生的库仑电场：

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

该电场属于无旋纵场，不随时间发生横向波动传播，且全空间磁场 $\mathbf{B} = 0$ 。由于不存在代表横波波动能量向外流动的坡印廷能流，因此该球对称径向振荡系统不产生任何辐射场。

8. 一飞轮半径为 R ，并有电荷均匀分布在其边缘上，总电量为 Q 。设此飞轮以恒定角速度 ω 旋转，求辐射场。

解：设飞轮边缘的厚度为 d ，则边缘上的电荷面密度为 $\sigma = \frac{Q}{2\pi R d}$ 。

体系的电偶极矩为：

$$\mathbf{p} = \oint \frac{Q}{2\pi R d} \cdot d \cdot \mathbf{x} dl = \frac{Q}{2\pi R} \oint \mathbf{x} dl = \frac{Q}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \mathbf{e}_x + \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \mathbf{e}_y \right] = 0$$

体系的磁偶极矩为：

$$\mathbf{m} = I \cdot \Delta \mathbf{S} = \frac{Q\omega}{2\pi} \cdot \pi R^2 \mathbf{e}_z = \frac{Q\omega R^2}{2} \mathbf{e}_z$$

由于飞轮以恒定角速度旋转，其磁偶极矩不随时间变化，故有：

$$\dot{\mathbf{p}} = 0, \quad \dot{\mathbf{m}} = 0$$

根据多极辐射理论，该体系不产生任何多极电磁辐射，其远处的辐射场严格为 0。

9. 利用电荷守恒定律，验证 $\mathbf{A}$ 和 φ 的推迟势满足洛伦兹条件。

证明：设坐标原点为 O ，源点为 $\mathbf{r}'$ ，场点为 $\mathbf{r}$ 。标势与矢势的推迟势表达式分别为：

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

其中推迟时间 $t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$ 。对标势求时间偏导数（利用 $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}$ ）：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} dV'$$

对矢势求散度，由于 $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')$ 通过 t' 隐含场点坐标 $\mathbf{r}$ ，利用复合微分关系可得：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \cdot \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\nabla' \cdot \mathbf{J})_{t'=\text{const}} dV'$$

应用高斯定理，将第一项体积分转化为包围整个源分布的外表面面积分：

$$\int_{V'} \nabla' \cdot \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' = \oint_{S'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{S}' = 0$$

当区域 V' 取得足够大时，闭合边界上面电流密度为零，该项消失。因此：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\nabla' \cdot \mathbf{J})_{t'=\text{const}} dV'$$

根据电荷守恒定律有 $(\nabla' \cdot \mathbf{J})_{t'=\text{const}} + \frac{\partial \rho}{\partial t'} = 0$ ，代入上式得：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \rho}{\partial t'} dV'$$

由于 $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ ，两对比可见：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \implies \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

即推迟势严格满足洛伦兹规范条件，证毕。

10. 半径为 R_0 的均匀永磁体，磁化强度为 $\mathbf{M}_0$ ，求以恒定角速度 ω 绕通过球心而垂直于 $\mathbf{M}_0$ 的轴旋转，设 $R_0 \omega \ll c$ ，求辐射场和能流。

解：该问题可等效为位于坐标原点的一个磁偶极矩的旋转辐射。该永磁球的总磁偶极矩大小为：

$$\mathbf{m}_0 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \mathbf{M}_0$$

设旋转轴为 z 轴， $\mathbf{M}_0$ 在 xy 平面内旋转，其振荡可分解为 x, y 方向上相位差为 $\frac{\pi}{2}$ 的简谐振动的合成。用复数形式表达为：

$$\mathbf{m}(t) = \frac{4}{3} \pi R_0^3 M_0 (\mathbf{e}_x + i \mathbf{e}_y) e^{-i\omega t}$$

根据磁偶极矩辐射场公式 $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 R} (\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}$ ，经过球坐标系分量投影与干涉匹配，解得远处的辐射磁场与电场复振幅分别为：

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \omega^2 R_0^3 M_0}{3c^2 R} (\mathbf{e}_\theta \cos \theta + i \mathbf{e}_\phi) e^{i(kR - \omega t)}$$

$$\mathbf{E} = c \mathbf{B} \times \mathbf{e}_r = \frac{\mu_0 \omega^2 R_0^3 M_0}{3cR} (i \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_\phi \cos \theta) e^{i(kR - \omega t)}$$

平均能流密度（坡印廷矢量的时间平均值）为：

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0 \omega^4 R_0^6 M_0^2}{18c^3 R^2} (1 + \cos^2 \theta) \mathbf{e}_r$$

11. 带电粒子作半径为 a 的非相对论性圆周运动，回旋频率为 ω . 求远处的辐射电磁场和辐射能流.

解：由于带电粒子在 xy 平面内作恒定圆周运动，其等效自转磁矩为常量，不产生磁偶极辐射. 但体系的电偶极矩随时间旋转变化：

$$\mathbf{p}(t) = ea\mathbf{e}'_r = ea(\cos \omega t \mathbf{e}_x + \sin \omega t \mathbf{e}_y)$$

写为复数形式： $\mathbf{p}(t) = ea(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)e^{-i\omega t}$, 对其求二次时间导数得 $\ddot{\mathbf{p}} = -\omega^2 ea(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)e^{-i\omega t}$.

根据电偶极辐射场公式 $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi cR} \ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}$, 代入球坐标基矢变换关系化简，得到远处的辐射场为：

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \omega^2 ea}{4\pi cR} (\mathbf{e}_\theta \cos \theta - i\mathbf{e}_\phi) e^{i(kR - \omega t)}$$

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{e}_r = \frac{\mu_0 \omega^2 ea}{4\pi R} (\mathbf{e}_\phi + i\mathbf{e}_\theta \cos \theta) e^{i(kR - \omega t)}$$

对应的平均辐射能流密度为：

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0 \omega^4 e^2 a^2}{32\pi^2 cR^2} (1 + \cos^2 \theta) \mathbf{e}_r$$

12. 设有一电矩振幅为 $\mathbf{p}_0$, 频率为 ω 的电偶极子距理想导体平面为 $a/2$ 处, $\mathbf{p}_0$ 平行于导体平面. 设 $a \ll \lambda$, 求在 $R \gg \lambda$ 处电磁场及辐射能流.

解：设理想导体平面为 xy 平面，电偶极子位于 $z = \frac{a}{2}$ 处：

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 e^{-i\omega t} \mathbf{e}_x$$

利用镜像法，在 $z = -\frac{a}{2}$ 处构造一个反向的像电偶极子：

$$\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_0 e^{-i\omega t} \mathbf{e}_x$$

在远场 $R \gg \lambda$ 处，两偶极子场叠加，由于存在光程差，总场通过干涉因子进行修正. 在 $a \ll \lambda$ (即 $ka \ll 1$) 条件下展开项 $e^{-i\frac{ka \cos \theta}{2}} - e^{i\frac{ka \cos \theta}{2}} \approx -ika \cos \theta$ ，联立叠加后解得远处的总辐射场为：

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}, t) = -\frac{i\mu_0\omega^3 p_0 a}{4\pi c^2} \cdot \frac{e^{i(kR-\omega t)}}{R} (\mathbf{e}_\theta \cos \theta \sin \phi + \mathbf{e}_\phi \cos^2 \theta \cos \phi)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = c\mathbf{B} \times \mathbf{e}_r = \frac{i\mu_0\omega^3 p_0 a}{4\pi c} \cdot \frac{e^{i(kR-\omega t)}}{R} (\mathbf{e}_\theta \cos^2 \theta \cos \phi - \mathbf{e}_\phi \cos \theta \sin \phi)$$

平均辐射能流密度为：

$$\mathbf{S} = \frac{\mu_0\omega^6 p_0^2 a^2}{32\pi^2 c^3 R^2} (\cos^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^4 \theta \cos^2 \phi) \mathbf{e}_r$$

13. 设有线偏振平面波 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$ 照射到一个绝缘介质球上 ($\mathbf{E}_0$ 在 z 方向)，引起介质球极化，极化矢量 $\mathbf{P}$ 是随时间变化的，因而产生辐射. 设平面波的波长 $\frac{2\pi}{k}$ 远大于球半径 R_0 ，求介质球所产生的辐射场和能流.

解： 由于长波近似条件 $\lambda \gg R_0$ 满足，介质球在外电场下的极化可以采用准静态方法处理. 球体被激发的总有效电偶极矩为：

$$\mathbf{p}(t) = \frac{4\pi\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon + 2\epsilon_0} R_0^3 E_0 e^{-i\omega t} \mathbf{e}_z$$

对时间求二次导数：

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = -\frac{4\pi\epsilon_0(\epsilon - \epsilon_0)}{\epsilon + 2\epsilon_0} \omega^2 R_0^3 E_0 e^{-i\omega t} \mathbf{e}_z$$

感应电偶极子向外辐射单色电磁波，代入电偶极辐射公式可解得介质球产生的辐射场为：

$$\mathbf{B} = -\frac{\omega^2 R_0^3 E_0 (\epsilon - \epsilon_0)}{(\epsilon + 2\epsilon_0) c^3 R} \sin \theta e^{i(kR-\omega t)} \mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{e}_r = -\frac{\omega^2 R_0^3 E_0 (\epsilon - \epsilon_0)}{(\epsilon + 2\epsilon_0) c^2 R} \sin \theta e^{i(kR-\omega t)} \mathbf{e}_\theta$$

辐射的平均能流密度（坡印廷矢量）为：

$$\mathbf{S} = \frac{\omega^4 R_0^6 E_0^2 (\epsilon - \epsilon_0)^2}{2\mu_0 (\epsilon + 2\epsilon_0)^2 c^5 R^2} \sin^2 \theta \mathbf{e}_r$$

Chapter 6

狭义相对论

1. 证明牛顿定律在伽利略变换下是协变的, 麦克斯韦方程在伽利略变换下不是协变的.

证明: 根据题意, 设 Σ' 系沿 Σ 系的 x 轴以速度 v 作匀速直线运动, 且在 $t = 0$ 时两坐标系重合. 伽利略变换关系为:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

以牛顿第二定律 $\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}$ 为例. 在 Σ' 系下, 其各个空间分量的二阶导数为:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{d(x - vt)}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \implies \frac{d^2 x'}{dt'^2} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

由于 $y' = y, z' = z, t' = t$, 同理:

$$\mathbf{F}' = m' \frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt'^2}$$

可见牛顿定律在 Σ' 系中保持形式不变, 因而在伽利略变换下是协变的.

以真空中的法拉第电磁感应定律 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 为例. 设有一正电荷 q 固着于 Σ' 系的原点 O' , 随 Σ' 系一同运动. 在 Σ' 系中, 该电荷是静止的, 其产生的场为静电场:

$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \mathbf{e}_{r'}, \quad \mathbf{B}' = 0$$

此时满足 $\nabla' \times \mathbf{E}' = 0$ 且 $-\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} = 0$, 方程显然成立. 利用伽利略变换将此电场表达式写在 Σ 系中:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(x - vt)\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z}{[(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

对其在 Σ 系中求旋度可以发现, 由于电场强度中显含时间 t , 导致 $\nabla \times \mathbf{E}$ 并不恒为零. 而同时在 Σ 系中观察, 电荷 q 以速度 $v\mathbf{e}_x$ 运动产生恒定电流, 对应的磁场 $\mathbf{B}$ 是稳恒的, 即 $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$.

因此在 Σ 系中 $\nabla \times \mathbf{E} \neq -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, 麦克斯韦方程的形式发生了改变, 故在伽利略变换下不是协变的.

2. 设有两根互相平行的尺, 在各自静止的参考系中的长度均为 l_0 , 它们以相同的速率 v 相对于某一参考系运动, 但运动方向相反, 且平行于尺子, 求站在一根尺子上测量另一根尺子的长度.

解: 不妨设其中一根尺子固定在 Σ'_1 系中, 另一根尺子固定在 Σ'_2 系中. 它们相对于地面参考系 Σ 的速度分别为 v 和 $-v$.

根据狭义相对论的速度合成公式, Σ'_2 系相对于 Σ'_1 系的速度 v' 大小为:

$$v' = \frac{v - (-v)}{1 - \frac{v(-v)}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

站在第一根尺子上测量第二根尺子 (即在 Σ'_1 系中观测在 Σ'_2 系中静长为 l_0 的尺子), 由于相对运动会产生动尺缩短效应, 其测量长度 l 为:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}$$

将 v' 的表达式代入上式进行化简:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{\frac{4v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2}} = l_0 \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)^2}} = l_0 \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

此即为站在一根尺子上测得的另一根尺子的长度.

3. 静止长度为 l_0 的车厢, 以速度 v 相对于地面 S 运行, 车厢的后壁以速度 u_0 向前推出一个小球, 求地面观测者看到小球从后壁到前壁的时间.

解: 设地面为参考系 S , 车厢为参考系 S' .

在地面参考系 S 中观察，由于长度收缩效应，车厢的实际运动长度为：

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

根据相对论速度合成公式，小球相对于地面的速度 u 为：

$$u = \frac{u_0 + v}{1 + \frac{u_0 v}{c^2}}$$

在地面参考系 S 中，车厢向前运行的同时小球追赶车头前壁。因此，小球从后壁运动到前壁所经历的时间 Δt 满足：

$$\Delta t = \frac{l}{u - v}$$

其中分母项为：

$$u - v = \frac{u_0 + v}{1 + \frac{u_0 v}{c^2}} - v = \frac{u_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 + \frac{u_0 v}{c^2}}$$

代入时间公式中计算可得：

$$\Delta t = \frac{l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\frac{u_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 + \frac{u_0 v}{c^2}}} = \frac{l_0 \left(1 + \frac{u_0 v}{c^2}\right)}{u_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

4. 一辆以速度 v 运动的列车上的观察者，在经过某一高大建筑物时，看见其避雷针上跳起一脉冲电火花，电光迅速传播，先后照亮了铁路沿线上的两铁塔，求列车上观察者看到的两铁塔被电光照亮的时间差。设建筑物及两铁塔都在一直线上，与列车前进方向一致，铁塔到建筑物的地面距离已知都是 l_0 。

解：取地面为静止参考系 Σ ，列车为运动参考系 Σ' 。设 $t = 0$ 时刻列车刚好经过该建筑物，并将此处选为两坐标系的原点。

在地面 Σ 系中，脉冲电光向两侧传播，经过 $t = \frac{l_0}{c}$ 的时间后，同时照亮了位于 $x_1 = l_0$ （右塔）和 $x_2 = -l_0$ （左塔）的两座铁塔。即两个事件在地面系中的时空坐标分别为：右塔： $(l_0, 0, 0, \frac{l_0}{c})$ ；左塔： $(-l_0, 0, 0, \frac{l_0}{c})$ 。

利用洛伦兹时间变换公式 $t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$ ，计算列车 Σ' 系中两塔被照亮的时刻：

$$t'_{\text{right}} = \gamma \left(\frac{l_0}{c} - \frac{vl_0}{c^2}\right) = \gamma \frac{l_0}{c} \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$t'_{\text{left}} = \gamma \left(\frac{l_0}{c} - \frac{v(-l_0)}{c^2} \right) = \gamma \frac{l_0}{c} \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

其中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. 因此, 列车上的观察者测得的两铁塔被照亮的时间差 $\Delta t'$ 为:

$$\Delta t' = t'_{\text{left}} - t'_{\text{right}} = \gamma \frac{l_0}{c} \left[\left(1 + \frac{v}{c} \right) - \left(1 - \frac{v}{c} \right) \right] = \gamma \frac{2vl_0}{c^2} = \frac{2vl_0}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

5. 有一光源 S 与接收器 R 相对静止, 距离为 l_0 , S - R 装置浸在均匀无限的液体介质 (静止折射率 n) 中, 试对下列三种情况计算光源发出讯号到接收器收到讯号所经历的时间:

- (1) 液体介质相对于 S - R 装置静止;
- (2) 液体沿着 S - R 连线方向以速度 v 运动;
- (3) 液体垂直于 S - R 连线方向以速度 v 运动.

解:

- (1) 当液体介质相对于 S - R 装置静止时, 光在介质中的传播速度为 $\frac{c}{n}$, 经历的时间显然为:

$$\Delta t_1 = \frac{l_0}{\frac{c}{n}} = \frac{nl_0}{c}$$

- (2) 当液体沿着 S - R 连线方向 (设为 x 轴) 以速度 v 运动时: 取固着于静止液体介质的参考系为 Σ' . 在 Σ' 系中, 各个方向上的光速均为 $\frac{c}{n}$.

通过洛伦兹变换, 在 S - R 装置静止的 Σ 系中, 沿介质运动方向的光速 u 为:

$$u = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{cn}}$$

因此, 接收器收到讯号经历的时间为:

$$\Delta t_2 = \frac{l_0}{u} = \frac{l_0 \left(1 + \frac{v}{cn} \right)}{\frac{c}{n} + v}$$

(3) 当液体垂直于 $S-R$ 连线方向 (设连线为 y 轴, 液体沿 x 轴) 以速度 v 运动时:

在 $S-R$ 装置静止的 Σ 系中, 光速在 x 方向的分量必须为零 (即 $u_x = 0$), 才能保证光直达接收器.

根据速度逆变换关系: $u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = 0 \implies u'_x = -v$. 由于在介质随动系 Σ' 中

总光速恒为 $\frac{c}{n}$, 故 y' 方向的速度分量为:

$$u'_y = \sqrt{\frac{c^2}{n^2} - u'^2_x} = \sqrt{\frac{c^2}{n^2} - v^2}$$

再将 $u'_y = \sqrt{\frac{c^2}{n^2} - v^2}$ 和 $u'_x = -v$ 代入 y 方向的速度变换公式中:

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = \frac{\sqrt{\frac{c^2}{n^2} - v^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{\frac{c^2}{n^2} - v^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

由此可得所经历的时间为:

$$\Delta t_3 = \frac{l_0}{u_y} = \frac{l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{\frac{c^2}{n^2} - v^2}}$$

6. 在坐标系 Σ 中有两个物体都以速度 u 沿 x 轴运动, 在 Σ 系看来, 它们一直保持距离 l 不变. 今有一观察者以速度 v 沿 x 轴运动, 他看到这两个物体的距离是多少?

解: 首先引入一个与这两个物体同步运动的固有参考系 Σ'' .

在 Σ 系中看, 两个物体均以速度 u 运动且相距为 l , 因此根据长度收缩效应, 它们在固有参考系 Σ'' 中的静止固有距离 l_0 满足:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \implies l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

新观察者所在的参考系为 Σ' , 其相对于 Σ 系的速度为 v . 根据速度合成公式, 两物体的固有系 Σ'' 相对于新观察者 Σ' 系的运动速度 v' 满足:

$$v' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

因此, 在新观察者所在的 Σ' 系中, 由于两物体以速度 v' 运动, 测得的距离 l' 应为固有长度 l_0 收缩后的结果:

$$l' = l_0 \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}$$

将 l_0 和 v' 的表达式代入上式化简:

$$l' = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}{1 - \frac{uv}{c^2}} = \frac{l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

此即为该观察者看到的两个物体之间的距离.

7. 一把直尺相对于 Σ 系静止, 直尺与 x 轴交角 θ , 今有一观察者以速度 v 沿 x 轴运动, 他看到直尺与 x 轴交角 θ' 有何变化?

解: 设直尺在静止参考系 Σ 中的长度为 l , 其在 x 和 y 方向上的分量分别为:

$$l_x = l \cos \theta, \quad l_y = l \sin \theta$$

观察者所在的参考系为 Σ' , 其相对于 Σ 系沿 x 轴运动.

根据长度收缩原理, 只有平行于运动方向 (x 方向) 的长度会发生收缩, 而垂直于运动方向 (y 方向) 的长度保持不变. 因此, 在 Σ' 系中测得的各分量长度为:

$$l'_x = l_x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l \cos \theta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$l'_y = l_y = l \sin \theta$$

在 Σ' 系中, 直尺与 x' 轴的交角 θ' 满足:

$$\tan \theta' = \frac{l'_y}{l'_x} = \frac{l \sin \theta}{l \cos \theta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

由于 $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$, 由此可见 $\tan \theta' > \tan \theta$, 即运动观察者看到的直尺与 x 轴的交角变大了.

8. 两个惯性系 Σ 和 Σ' 中各放置若干时钟, 同一惯性系的诸时钟同步, Σ' 相对于 Σ 以速度 v 沿 x 轴运动. 设两系原点相遇时 $t_0 = t'_0 = 0$, 问处于 Σ 系中某点 (x, y, z) 处的时钟与 Σ' 系中何处时钟相遇时, 指示的时刻相同? 读数是多少?

解: 根据洛伦兹变换关系, 有时空坐标变换方程:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

并且 $y' = y, z' = z$. 设 Σ 系中 $P(x, y, z, t)$ 处的时钟与 Σ' 系中 $Q(x', y', z', t')$ 处的时钟相遇时, 它们指示的时间相同.

在方程 (2) 中令 $t = t'$, 可解得两系时钟相遇处在 Σ 系中的空间坐标 x 与时间 t 的关系:

$$t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = t - \frac{v}{c^2}x \implies x = \frac{c^2}{v}t \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$$

将上述 x 的表达式代入方程 (1) 中, 求得相遇处在 Σ' 系中的空间位置:

$$x' = \frac{\frac{c^2}{v}t \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{c^2}{v}t \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) = -x$$

由此可知, 相遇时对应的时钟读数 (指示的时刻) 为:

$$t = t' = \frac{x}{\frac{c^2}{v} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)} = \frac{x}{v} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$$

即当 Σ 系中 (x, y, z) 处的时钟与 Σ' 系中 $(-x, y, z)$ 处的时钟相遇时, 两者的指示时刻相同, 读数如上式所示.

9. 火箭由静止状态加速到 $v = \sqrt{0.9999}c$, 设瞬时惯性系上加速度为 $|\dot{v}'| = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 问按照静止系的时钟和按火箭内的时钟加速火箭各需要多少时间?

解: 令地球静止系为 Σ 系, 火箭的瞬时惯性系为 Σ' 系. 设火箭沿 x 轴正方向运动.

由相对论速度合成公式可导出，火箭在静止系 Σ 中的加速度 a 与其在瞬时随动系 Σ' 中的固有加速度 a' 满足关系：

$$a = \frac{dv}{dt} = a' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

1) 对于静止系，对上式进行分离变量并积分：

$$\int_0^t a' dt = \int_0^{\sqrt{0.9999}c} \frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$a't = \left[\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \Big|_0^{\sqrt{0.9999}c} = \frac{\sqrt{0.9999}c}{\sqrt{1 - 0.9999}} = 100\sqrt{0.9999}c$$

$$t = \frac{100\sqrt{0.9999}c}{a'}$$

代入数据 $a' = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ：

$$t = \frac{100 \times \sqrt{0.9999} \times 3 \times 10^8}{20} \approx 1.5 \times 10^9 \text{ s} \approx 47.5 \text{ yr}$$

2) 对于火箭内时钟，根据时间膨胀效应，固有时间与静止系时间满足 $dt = \gamma d\tau = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 。代入加速度公式：

$$\frac{dv}{d\tau} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = a' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = a' d\tau$$

对两边进行积分：

$$\int_0^\tau a' d\tau = \int_0^v \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow a'\tau = \frac{c}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} \right)$$

代入 $v = \sqrt{0.9999}c$ ：

$$\tau = \frac{c}{2a'} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{0.9999}}{1 - \sqrt{0.9999}} \right)$$

10. 一平面镜以速度 v 自左向右运动，一束频率为 ω_0 、与水平线成 θ_0 夹角的平面光波自左向右入射到镜面上，求反射光波的频率 ω 及反射角 θ ，垂直入射的情况如何？

解：根据平面镜的不同放置取向，分为以下两种情况讨论：

平面镜平行于运动方向 选取相对于平面镜静止的参考系为 Σ' 系，静止系为 Σ 系。

在 Σ 系中，入射光线的波矢与频率满足： $k_{ix} = k \cos \theta_0, k_{iy} = k \sin \theta_0, \omega_i = \omega_0$ 。

由于镜面平行于速度方向，横向的相对运动并不改变光在镜面反射时的切向连续性以及法向反射特征。通过洛伦兹变换到 Σ' 系反射后再逆变换回 Σ 系，可以确定在实验室系中观察到的规律依然是：反射角等于入射角：

$$\theta_r = \theta_i = \frac{\pi}{2} - \theta_0.$$

反射光频率保持不变：

$$\omega_r = \omega_0.$$

若光线垂直入射 ($\theta_0 = \frac{\pi}{2}$)，上述结论依然不变。

情况二：镜面垂直于运动方向 放置在静止 Σ 系中，向右运动的镜面垂直于 x 轴，入射光分量满足： $k_{ix} = -k \cos \theta_0, k_{iy} = -k \sin \theta_0, \omega_i = \omega_0$ 。

变换到平面镜随动系 Σ' (此时镜面静止)，由标准反射定律知 $k'_{rx} = -k'_{ix}, k'_{ry} = k'_{iy}$ 。

再代入逆变换关系回到 Σ 系，设 $\beta = \frac{v}{c}$ ，最终解得反射光参数为：

反射角 θ 满足：

$$\tan \theta = \left| \frac{k_{ry}}{k_{rx}} \right| = \frac{\sin \theta_0}{\gamma^2 [(\beta + \cos \theta_0) + \beta(1 + \beta \cos \theta_0)]}$$

反射光频率为：

$$\omega_r = \gamma^2 \omega_0 [(1 + \beta \cos \theta_0) + \beta(\beta + \cos \theta_0)]$$

如果光线垂直于镜面入射 (即 $\theta_0 = 0$)，代入上式化简可得：

反射角 $\theta_i = \theta_r = 0$ ，反射光频率变为：

$$\omega_r = \gamma^2 \omega_0 (1 + \beta)^2 = \omega_0 \frac{1 + \beta}{1 - \beta}$$

11. 在洛伦兹变换中，若定义快度 y 为 $\tanh y = \beta$ 。

(1) 证明洛伦兹变换矩阵可写为：

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \cosh y & 0 & 0 & i \sinh y \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i \sinh y & 0 & 0 & \cosh y \end{pmatrix}$$

(2) 证明速度合成公式 $\beta = \frac{\beta' + \beta''}{1 + \beta'\beta''}$ 可用快度表示为 $y = y' + y''$.

证明：

(1) 常规的标准洛伦兹变换矩阵形式为：

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

已知 $\tanh y = \beta$ ，根据双曲函数基本恒等式 $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ ，可得：

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y}}} = \cosh y$$

同时，项 $\beta\gamma$ 可以写作：

$$\beta\gamma = \tanh y \cdot \cosh y = \sinh y$$

将 $\gamma = \cosh y$ 和 $\beta\gamma = \sinh y$ 代入原变换矩阵中，即得：

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \cosh y & 0 & 0 & i \sinh y \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i \sinh y & 0 & 0 & \cosh y \end{pmatrix}$$

原式得证.

(2) 将速度合成公式 $\beta = \frac{\beta' + \beta''}{1 + \beta'\beta''}$ 用快度定义式代入展开：

$$\tanh y = \frac{\tanh y' + \tanh y''}{1 + \tanh y' \tanh y''}$$

利用双曲正切函数的加法定理，上式右边格式恰好为 $\tanh(y' + y'')$ ，因此有：

$$\tanh y = \tanh(y' + y'') \implies y = y' + y''$$

即速度合成公式在快度表述下退化为简单的线性叠加.

12. 电偶极子 $\mathbf{p}_0$ 以速度 $\mathbf{v}$ 作匀速运动, 求它产生的电磁势和场 $\varphi, \mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{B}$.

解: 选粒子 $\mathbf{p}_0$ 的随动坐标系为 Σ' 系. 在 Σ' 系中, 静止的电偶极子产生的电磁势和场为:

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}'}{r'^3}, \quad \mathbf{A}' = 0$$

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}')\mathbf{r}'}{r'^5} - \frac{\mathbf{p}_0}{r'^3} \right], \quad \mathbf{B}' = 0$$

利用四维势 $A_\mu = \left(\mathbf{A}, \frac{i}{c}\varphi \right)$ 的洛伦兹逆变换关系 $A_\mu = a_{\mu\nu}A'_\nu$, 变换到实验室系 Σ 中 (设运动沿 x 轴):

$$\varphi = \gamma\varphi' = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}'}{r'^3}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x \mathbf{e}_x = \frac{\beta\gamma}{c} \varphi' \mathbf{e}_x = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \varphi$$

根据场强张量的变换公式, 实验室系中的电磁场分量为:

$$\mathbf{E}_\parallel = \mathbf{E}'_\parallel, \quad \mathbf{E}_\perp = \gamma \mathbf{E}'_\perp$$

$$\mathbf{B}_\parallel = 0, \quad \mathbf{B}_\perp = \gamma \left(\frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}' \right)_\perp = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}_\perp$$

通过坐标变换, 其中随动系的时空矢量满足 $\mathbf{r}' = (\gamma(x - vt), y, z)$, 将其代入上述场强式即可得到完整的时空分布解.

13. 设在参考系 Σ 内 $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, Σ' 系沿 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 的方向运动, 问 Σ' 系应以什么样的速度相对于 Σ 系运动才能使其只有电场或只有磁场?

解: 不妨设 Σ' 系以速度 $\mathbf{v}$ 沿 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 的方向 (设为 x 轴) 运动.

由电磁场横向分量的相对论变换公式:

$$\mathbf{E}'_\perp = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{B}'_\perp = \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}\right)$$

1) 若要使 Σ' 系中只有磁场 (即 $\mathbf{E}' = 0$): 则要求 $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$. 两边同时叉乘 $\mathbf{B}$ 并应用矢量恒等式展开可解得:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

取模长得到其速度大小为 $v = \frac{E}{B}$. 由于物理参考系的相对运动速度必须低于光速 ($v < c$), 故此情况能够实现的前提约束条件为: $E < cB$.

2) 若要使 Σ' 系中只有电场 (即 $\mathbf{B}' = 0$): 则要求 $\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} = 0$. 两边同时叉乘 $\mathbf{E}$ 并应用矢量恒等式展开可解得:

$$\mathbf{v} = \frac{c^2}{E^2}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

取模长得到其速度大小为 $v = c^2 \frac{B}{E}$. 同理由 $v < c$ 限制, 此情况能够实现的前提约束条件为: $E > cB$.

14. 做匀速运动的点电荷所产生的电场在运动方向发生“压缩”, 这时在电荷的运动方向上的电场 $\mathbf{E}$ 与库仑场相比较会发生减弱, 如何理解这一减弱与变换公式 $E_{\parallel} = E'_{\parallel}$ 的关系.

解: 设点电荷 e 以速度 v 沿 Σ 系的 x 轴方向匀速运动, 选取 Σ' 系为其随动参考系. 在随动系 Σ' 中, 点电荷静止, 其产生的场为标准的静电各向同性库仑场:

$$E'_x = \frac{ex'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}$$

由电场平行分量的变换公式可知: $E_{\parallel} = E'_{\parallel} \Rightarrow E_x = E'_x = \frac{ex'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}$.

然而, 这一等式是在两套不同的时空坐标下建立的. 引入时空坐标变换方程:

$$\begin{cases} x' = \gamma x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}.$$

将坐标变换代入距离项 $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ 中. 在 Σ 系中, 运动方向 (即 x 轴上, $y = 0, z = 0$) 的空间距离表现为 $r' = \gamma x$. 此时实验室系下的实际电场强度化为:

$$E_x = \frac{e(\gamma x)}{4\pi\epsilon_0 (\gamma x)^3} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{ex}{4\pi\epsilon_0 x^3} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{e}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) E_0$$

其中 E_0 为该点处电荷静止时的普通静电库仑场.

场强变换公式 $E_{\parallel} = E'_{\parallel}$ 表面上看起来数值未变, 但由于狭义相对论的长度收缩效应, 运动方向上的空间尺缩反馈到了电位移与场的具体时空坐标点上. 这种时空几何的改变导致在运动方向上实际观测到的场强比库仑场减弱了 $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ 倍. 因此, 场强的变换关系与空间的压缩效应在逻辑上是完全自洽且统一的.

15. 有一沿 z 轴方向螺旋进动的静磁场 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0(\cos k_m z \mathbf{e}_x + \sin k_m z \mathbf{e}_y)$, 其中 $k_m = \frac{2\pi}{\lambda_m}$, λ_m 为磁场周期长度. 现有一沿 z 轴以速度 $v = \beta c$ 运动的惯性系, 求在该惯性系中观察到的电磁场. 证明当 $\beta \simeq 1$ 时, 该电磁场类似于一系列频率为 $\gamma \cdot \beta c k_m$ 的圆偏振电磁波.

解：由电磁场变换式，在运动惯性系 Σ' 中（设沿 z 轴正方向运动）：

平行分量保持不变： $E'_z = E_z = 0$, $B'_z = B_z = 0$.

横向分量满足：

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp} = \gamma\beta c \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_0(\cos k_m z \mathbf{e}_x + \sin k_m z \mathbf{e}_y) = \gamma\beta c B_0(-\sin k_m z \mathbf{e}_x + \cos k_m z \mathbf{e}_y)$$

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E}\right)_{\perp} = \gamma\mathbf{B}_{\perp} = \gamma\mathbf{B}_0(\cos k_m z \mathbf{e}_x + \sin k_m z \mathbf{e}_y)$$

因此在该惯性系中观察到的电磁场为：

$$\mathbf{E}' = \gamma\beta c B_0(-\sin k_m z \mathbf{e}_x + \cos k_m z \mathbf{e}_y) = \gamma\beta c B_0 \left[\cos\left(k_m z + \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{e}_x + \sin\left(k_m z + \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{e}_y \right]$$

$$\mathbf{B}' = \gamma B_0(\cos k_m z \mathbf{e}_x + \sin k_m z \mathbf{e}_y)$$

当 $\beta \approx 1$ 时， $v \approx c$ ，显然有

$$\mathbf{E}' \perp (-\mathbf{e}_z), \quad \mathbf{B}' \perp (-\mathbf{e}_z), \quad \mathbf{E}' \perp \mathbf{B}',$$

且满足电场与磁场模长关系

$$|\mathbf{E}'| = \beta c |\mathbf{B}'| \approx c |\mathbf{B}'|.$$

这完全符合真空中平面电磁波的结构特征，因此该场类似于一系列圆偏振平面电磁波。

由四维波矢量 $k_{\mu} = \left(\mathbf{k}, i\frac{\omega}{c}\right)$ 的洛伦兹变换关系 $k'_{\mu} = a_{\mu\nu} k_{\nu}$ 得：

由于在原参考系中是静磁场，有 $\omega = 0, k_z = k_m$.

变换到新系中：

$$k'_z = \gamma\left(k_z - \frac{v}{c^2}\omega\right) = \gamma k_m, \quad k'_x = k_x = 0, \quad k'_y = k_y = 0$$

$$\omega' = \gamma(\omega - vk_z) = -\gamma\beta ck_m$$

取绝对值，该圆偏振电磁波的频率即为 $\gamma \cdot \beta ck_m$ ，原题得证。

16. 有一无限长均匀带电直线，在其静止参考系中线电荷密度为 λ ，该线电荷以速度 $v = \beta c$ 沿自身长度匀速移动。在与直线相距为 d 的地方有一以同样速度平行于直线运动的点电荷 e ，分别用下列两种方法求出作用在电荷上的力：

- (1) 在直线静止系中确定力，然后用四维力变换公式；
- (2) 直接计算线电荷和线电流作用在运动电荷上的电磁力。

解：

- (1) 在直线的静止参考系 Σ' 中, 由高斯定理可知, 相距 d 处的电场强度为 $\mathbf{E}' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \mathbf{e}_r$, 磁场 $\mathbf{B}' = 0$.

点电荷 e 在该系中也是静止的, 其受到的静电力为:

$$\mathbf{F}' = e\mathbf{E}' = \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \mathbf{e}_r$$

对应的四维力矢量为

$$K'_\mu = \left(\gamma' \mathbf{F}', \frac{i}{c} \gamma' \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}' \right).$$

由于 $\mathbf{v}' = 0, \gamma' = 1$, 故 $K'_\mu = (\mathbf{F}', 0)$.

根据四维力的洛伦兹变换关系 $K_\mu = a_{\mu\nu} K'_\nu$, 由于受力方向 $\mathbf{e}_r$ 垂直于运动方向 (x 方向), 横向分量在变换下保持不变:

$$K_r = K'_r = \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}$$

在实验室系 Σ 中, 电荷的运动速度为 v , 其受到的实际三维洛伦兹力 $\mathbf{F}$ 与四维力满足 $\mathbf{K} = \gamma \mathbf{F}$, 因此:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{K} = \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0 d \gamma} \mathbf{e}_r$$

- (2) 在直线静止系中, 四维电流密度矢量为 $J'_\mu = (0, 0, 0, ic\rho')$, 其中 $\rho' = \frac{\lambda}{S}$ (S 为直线截面积).

由洛伦兹变换 $J_\mu = a_{\mu\nu} J'_\nu$ 转换到实验室系 Σ 中:

$$J_x = \beta c \gamma \frac{\lambda}{S}, \quad \rho = \gamma \frac{\lambda}{S}$$

因此在实验室系中, 线电荷密度表现为 $\gamma\lambda$, 沿 x 轴流动的线电流为 $I = \beta c \gamma \lambda$.

由高斯定理和安培环路定理, 电荷 e 处的电场强度和磁感应强度分别为:

$$\mathbf{E} = \frac{\gamma\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \mathbf{e}_\phi$$

电荷 e 以速度 $v\mathbf{e}_x$ 运动, 所受的洛伦兹力为:

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{e\gamma\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \mathbf{e}_r - ev \frac{\mu_0(\beta c \gamma \lambda)}{2\pi d} \mathbf{e}_r = \frac{e\gamma\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \mathbf{e}_r = \frac{e\lambda}{2\pi\epsilon_0 d \gamma} \mathbf{e}_r$$

两种方法求得的结果完全相同.

17. 质量为 M 的静止粒子衰变为两个粒子 m_1 和 m_2 , 求粒子 m_1 的动量和能量.

解: 衰变前粒子的总动量 $\mathbf{p} = 0$, 总能量 $E = Mc^2$. 衰变后, 由动量守恒定律可知, 两粒子的动量大小相等、方向相反:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 \implies |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = p$$

根据能量守恒定律, 衰变前后的总能量相等:

$$\sqrt{p^2c^2 + m_1^2c^4} + \sqrt{p^2c^2 + m_2^2c^4} = Mc^2$$

移项并两边平方展开:

$$p^2c^2 + m_1^2c^4 = \left(Mc^2 - \sqrt{p^2c^2 + m_2^2c^4} \right)^2 = M^2c^4 - 2Mc^2\sqrt{p^2c^2 + m_2^2c^4} + p^2c^2 + m_2^2c^4$$

消去两边的 p^2c^2 , 可解得粒子 m_2 的能量 E_2 为:

$$E_2 = \sqrt{p^2c^2 + m_2^2c^4} = \frac{c^2}{2M} (M^2 + m_2^2 - m_1^2)$$

同理, 移项消去另一项可解得粒子 m_1 的能量 E_1 为:

$$E_1 = \frac{c^2}{2M} (M^2 + m_1^2 - m_2^2)$$

利用相对论能量与动量的关系 $p^2c^2 = E_1^2 - m_1^2c^4$, 代入化简可得粒子 m_1 的动量大小为:

$$p_1 = p = \frac{c}{2M} \sqrt{[M^2 - (m_1 + m_2)^2][M^2 - (m_1 - m_2)^2]}$$

18. 已知某一粒子 M 衰变成质量为 m_1 和 m_2 、动量为 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_2$ (两者方向夹角为 θ) 的两个粒子, 求该粒子的质量 m .

解: 根据动量守恒定律, 原粒子的动量 $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$. 由余弦定理可得其模长的平方为:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos \theta \quad (1)$$

根据能量守恒定律, 衰变前后的总能量相等:

$$\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = \sqrt{p_1^2c^2 + m_1^2c^4} + \sqrt{p_2^2c^2 + m_2^2c^4} \quad (2)$$

将方程 (2) 两边同时平方展开:

$$p^2c^2 + m^2c^4 = (p_1^2c^2 + m_1^2c^4) + (p_2^2c^2 + m_2^2c^4) + 2\sqrt{(p_1^2c^2 + m_1^2c^4)(p_2^2c^2 + m_2^2c^4)}$$

将方程 (1) 乘以 c^2 后的 $p^2 c^2 = p_1^2 c^2 + p_2^2 c^2 + 2p_1 p_2 c^2 \cos \theta$ 代入上式中, 消去两边相同的项:

$$2p_1 p_2 c^2 \cos \theta + m^2 c^4 = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2\sqrt{(p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4)(p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4)}$$

两边同时除以 c^4 , 可得:

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2}{c^2} \left[\sqrt{(p_1^2 + m_1^2 c^2)(p_2^2 + m_2^2 c^2)} - p_1 p_2 \cos \theta \right]$$

19.

- (1) 设 E 和 $\mathbf{p}$ 是粒子体系在实验室参考系 Σ 中的总能量和总动量 ($\mathbf{p}$ 与 x 轴方向夹角为 θ), 证明在另一参考系 Σ' (相对于 Σ 以速度 v 沿 x 轴方向运动) 中的粒子体系总能量和总动量满足:

$$p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{\beta E}{c} \right), \quad E' = \gamma(E - c\beta p_x),$$

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma \left(\cos \theta - \frac{\beta E}{cp} \right)}.$$

- (2) 某光源发出的光束在两个惯性系中与 x 轴的夹角分别为 θ 和 θ' , 证明:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}.$$

- (3) 考虑在 Σ 系内立体角为 $d\Omega = d(\cos \theta) d\phi$ 的光束, 证明当变换到另一惯性系 Σ' 时, 立体角变为

$$d\Omega' = \frac{d\Omega}{\gamma^2(1 - \beta \cos \theta)^2}.$$

证明:

- (1) 系统的四维动量矢量 $p_\mu = \left(\mathbf{p}, \frac{i}{c} E \right)$ 满足标准洛伦兹变换:

$$p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{v}{c^2} E \right) = \gamma \left(p_x - \frac{\beta E}{c} \right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E' = \gamma(E - vp_x) = \gamma(E - c\beta p_x)$$

由于 $p_x = p \cos \theta, p_y = p \sin \theta$, 在新系 Σ' 中总动量与 x' 轴的夹角 θ' 满足:

$$\tan \theta' = \frac{p'_y}{p'_x} = \frac{p \sin \theta}{\gamma \left(p \cos \theta - \frac{\beta E}{c} \right)} = \frac{\sin \theta}{\gamma \left(\cos \theta - \frac{\beta E}{cp} \right)}$$

(2) 光子的四维波矢量为 $k_\mu = \left(\mathbf{k}, i\frac{\omega}{c}\right)$. 沿 x 轴方向的洛伦兹变换为:

$$k'_x = \gamma \left(k_x - \frac{v}{c^2} \omega \right), \quad \omega' = \gamma(\omega - vk_x)$$

已知对光子有 $k_x = \frac{\omega}{c} \cos \theta, k'_x = \frac{\omega'}{c} \cos \theta'$, 代入上式可得:

$$\omega' = \gamma\omega(1 - \beta \cos \theta)$$

$$\frac{\omega'}{c} \cos \theta' = \gamma \left(\frac{\omega}{c} \cos \theta - \frac{\beta\omega}{c} \right) \implies \cos \theta' = \frac{\gamma\omega(\cos \theta - \beta)}{\omega'} = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}$$

利用横向波矢不变性 $k'_y = k_y \implies \frac{\omega'}{c} \sin \theta' = \frac{\omega}{c} \sin \theta$, 同理代入可得:

$$\sin \theta' = \frac{\omega}{\omega'} \sin \theta = \frac{\sin \theta}{\gamma(1 - \beta \cos \theta)}$$

(3) 在 Σ' 系中, 立体角微元为 $d\Omega' = d(\cos \theta') d\phi'$. 由于绕 x 轴具有轴对称性, 角向微元保持不变 ($d\phi' = d\phi$). 将第 (2) 问中证得的 $\cos \theta'$ 表达式对 $\cos \theta$ 求全微分:

$$\begin{aligned} d(\cos \theta') &= d \left(\frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta} \right) \\ &= \frac{(1 - \beta \cos \theta) - (\cos \theta - \beta)(-\beta)}{(1 - \beta \cos \theta)^2} d(\cos \theta) \\ &= \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^2} d(\cos \theta) \end{aligned}$$

因为 $\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$, 故上式化为 $d(\cos \theta') = \frac{d(\cos \theta)}{\gamma^2(1 - \beta \cos \theta)^2}$. 从而有:

$$d\Omega' = d(\cos \theta') d\phi' = \frac{d(\cos \theta) d\phi}{\gamma^2(1 - \beta \cos \theta)^2} = \frac{d\Omega}{\gamma^2(1 - \beta \cos \theta)^2}$$

原命题得证.

20. 考虑一个质量为 m_1 , 能量为 E_1 的粒子射向另一质量为 m_2 的静止粒子的体系. 通常在高能物理中, 选择质心参考系有许多方便之处, 在该参考系中, 总动量为零.

(1) 求质心系相对于实验室系的速度 β_c ;

(2) 求质心系中每个粒子的动量、能量和总能量;

- (3) 已知电子静止质量 $m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$. 北京正负电子对撞机 (BEPC) 的设计能量为 $2 \times 2.2 \text{ GeV}$ ($1 \text{ GeV} = 10^3 \text{ MeV}$). 估计一下若用单束电子入射于静止靶, 要用多大的能量才能达到与对撞机相同的相对运动能量?

解:

- (1) 在实验室系中, 系统的总动量为 $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$, 总能量为 $E = E_1 + m_2 c^2$.

质心系中总动量为零, 由四维动量变换关系, 质心系相对于实验室系的速度 β_c 满足:

$$\beta_c = \frac{p_1 c^2}{E_1 + m_2 c^2} = \frac{\sqrt{E_1^2 - m_1^2 c^4}}{E_1 + m_2 c^2}$$

- (2) 系统在实验室系下的四维动量平方 (洛伦兹不变量) 为:

$$s = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = \frac{(E_1 + m_2 c^2)^2 - (E_1^2 - m_1^2 c^4)}{c^2} = m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + \frac{2m_2 E_1}{c^2}$$

在质心系中总动量为 0, 故总能量 E' 满足 $\left(\frac{E'}{c}\right)^2 = s$, 解得质心系总能量为:

$$E' = \sqrt{m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2m_2 E_1 c^2}$$

根据第 17 题的结论, 可得质心系中粒子的动量大小 p' 为:

$$p' = \frac{m_2 c \sqrt{E_1^2 - m_1^2 c^4}}{E'}$$

对应的每个粒子的能量分别为:

$$E'_1 = \frac{m_1^2 c^4 + m_2 E_1 c^2}{E'}, \quad E'_2 = \frac{m_2^2 c^4 + m_2 E_1 c^2}{E'}$$

- (3) 对撞机中正负电子对撞, 其质心系下的总能量为 $E_{\text{cm}} = 2 \times 2.2 \text{ GeV} = 4.4 \text{ GeV}$.

对于单束电子 (质量 m_e) 撞击静止电子靶 (质量 m_e) 的体系, 由上方求得的不变量公式:

$$E_{\text{cm}}^2 = 2m_e^2 c^4 + 2m_e E_1 c^2 \approx 2m_e c^2 E_1$$

解得所需的单束电子入射能量 E_1 为:

$$E_1 \approx \frac{E_{\text{cm}}^2}{2m_e c^2} = \frac{(4.4 \times 10^3 \text{ MeV})^2}{2 \times 0.511 \text{ MeV}} \approx 1.89 \times 10^7 \text{ MeV} = 1.89 \times 10^4 \text{ GeV}$$

21. 电荷为 e ，质量为 m 的粒子在均匀电场 $\mathbf{E}$ 中运动，初速度为零。试确定粒子的运动轨迹与时间的关系，并研究非相对论情况。

解： (1) **相对论情况：**

取均匀电场方向为 z 轴。相对论动力学方程为：

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

由于初速度为 0，分量式满足 $p_x = p_y = 0$ ，且有 $\frac{dp_z}{dt} = eE \Rightarrow p_z = eEt$ 。

粒子的总能量 W 满足：

$$W = \sqrt{p_z^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{e^2 E^2 c^2 t^2 + m^2 c^4}$$

利用关系式 $p_z = \frac{W}{c^2} v_z = \frac{W}{c^2} \frac{dz}{dt}$ ，代入可得速度表达式：

$$\frac{dz}{dt} = \frac{p_z c^2}{W} = \frac{eEc^2 t}{\sqrt{e^2 E^2 c^2 t^2 + m^2 c^4}}$$

设粒子从 $z = 0$ 处开始运动，对时间积分：

$$z = \int_0^t \frac{eEc^2 t}{\sqrt{e^2 E^2 c^2 t^2 + m^2 c^4}} dt = \frac{mc^2}{eE} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{eE}{mc} t \right)^2} - 1 \right]$$

(2) **非相对论情况：**

非相对论下的力学方程为 $e\mathbf{E} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ ，其中 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ 。

同理可得

$$p_z = eEt \Rightarrow v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{eE}{m} t.$$

对时间积分，设粒子从 $z = 0$ 处开始运动，则：

$$z = \frac{eE}{m} \int_0^t t dt = \frac{eE}{2m} t^2$$

这正是经典的非相对论匀加速直线运动轨迹。

22. 利用洛伦兹变换，试确定粒子在互相垂直的均匀电场 $E\mathbf{e}_x$ 和磁场 $B\mathbf{e}_y$ ($E > cB$) 内的运动规律，设粒子初速度为零。

解： 为了简化运动方程，可以引入一个沿 z 轴以速度 u 匀速运动的参考系 Σ' 。根据电磁场变换公式，若选择合适的 u 使 Σ' 系内的磁场 $\mathbf{B}' = 0$ ，则要求：

$$\mathbf{B}' = \gamma_u \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{u}}{c^2} \times \mathbf{E} \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \frac{c^2}{E^2} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c^2 B}{E} \mathbf{e}_z$$

由于 $E > cB$, 此速度满足 $u < c$. 此时 Σ' 系中只有沿 x' 轴的均匀电场, 其大小为:

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E}}{\gamma_u} = \mathbf{E} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

由第 21 题关于均匀电场中相对论运动的结论, 粒子在 Σ' 系中的运动轨迹与时间的关系为 (设初位置在原点):

$$x' = \frac{mc^2}{eE'} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{eE'}{mc} t' \right)^2} - 1 \right], \quad y' = 0, \quad z' = 0$$

利用洛伦兹逆变换关系将轨迹变回实验室参考系 Σ , 其中

$$x = x', y = 0, z = \gamma_u(z' + ut'), t = \gamma_u(t' + \frac{uz'}{c^2}),$$

由于 $z' = 0$, 有时空关系 $z = \gamma_u ut'$ 和 $t = \gamma_u t' \implies t' = \frac{t}{\gamma_u}$. 代入可得 $z = ut$.

同时将 $t' = \frac{t}{\gamma_u}$ 和 $E' = \frac{E}{\gamma_u}$ 代入 x' 的表达式中:

$$x = \frac{mc^2 \gamma_u}{eE} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{eE}{\gamma_u^2 mc} t \right)^2} - 1 \right]$$

综上所述, 粒子在互相垂直的均匀电磁场中的实际运动规律为:

$$\begin{cases} x = \frac{mc^2 \gamma_u}{eE} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{eE}{\gamma_u^2 mc} t \right)^2} - 1 \right] \\ y = 0 \\ z = ut \end{cases}$$

其中速度参数 $u = \frac{c^2 B}{E}$, 洛伦兹因子 $\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$.

23. 已知 $t = 0$ 时点电荷 q_1 位于原点, q_2 静止于 y 轴 $(0, y_0, 0)$ 上, q_1 以速度 v 沿 x 轴匀速运动, 试分别求出 q_1 、 q_2 各自所受的力, 如何解释两力不是等值反向?

解: 对于 q_2 , 选择固定在 q_1 上的随动参考系 Σ' . 在 Σ' 系中, q_1 静止并产生静电场. 利用洛伦兹变换回到实验室参考系 Σ , 在 $t = 0$ 瞬时, 运动电荷 q_1 在 y 轴 $(0, y_0, 0)$ 处产生的电场和磁场分别为:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\gamma q_1}{4\pi\epsilon_0 y_0^2} \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{B}_1 = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}_1}{c^2} = \frac{\gamma v q_1}{4\pi\epsilon_0 c^2 y_0^2} \mathbf{e}_z$$

由于 q_2 在实验室系中瞬时静止 ($\mathbf{v}_2 = 0$)，它只受到电场力的作用：

$$\mathbf{F}_{12} = q_2 \mathbf{E}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} y_0^2} \mathbf{e}_y$$

而对于 q_1 在实验室系中， q_2 是静止的点电荷，它在原点 (q_1 所在处) 产生的场为普通的库仑静电场，磁场为零：

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 y_0^2} \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{B}_2 = 0$$

q_1 以速度 $v\mathbf{e}_x$ 运动，它受到的洛伦兹力为：

$$\mathbf{F}_{21} = q_1(\mathbf{E}_2 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_2) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 y_0^2} \mathbf{e}_y$$

显见 $\mathbf{F}_{12} \neq -\mathbf{F}_{21}$ ，即两粒子的相互作用力并不满足等值反向的物理要求。这是因为当电荷处于运动状态时，空间中传播的电磁场自身具有动量和动量流。在本体系中，两电荷相互作用时电磁场的总动量随时间是变化的 ($\frac{d\mathbf{p}_{\text{field}}}{dt} \neq 0$)。根据广义的动量守恒定律，系统满足：

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} + \frac{d\mathbf{p}_{\text{field}}}{dt} = 0$$

因此，两粒子之间受力的不对称性正是由电磁场动量的变化引起的。这说明涉及运动电荷的电动力学问题中，牛顿第三定律（动量机械守恒）一般不再适用。

24. 试比较下列两种情况下两个电荷的相互作用力：(1) 两个静止电荷 q 位于 y 轴上相距为 l ；(2) 两个电荷都以相同的速度 $\mathbf{v}$ 平行于 x 轴匀速运动。

解： (1) 第一种情况属于标准的静电场问题。两电荷之间的相互作用力为纯粹的静电库仑排斥力，大小为：

$$F_0 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2}$$

(2) 第二种情况中，两电荷以相同的速度 $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ 沿 x 轴平行运动。根据第 23 题的场分布规律，运动电荷之间除了电排斥力外，由于电流的存在，还会产生等效的磁吸引力。其中一个电荷在另一个电荷处产生的总洛伦兹力大小为：

$$F = q(E - vB) = qE \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

代入运动电荷横向场的电场公式 $E = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0 l^2}$ ：

$$F = q \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l^2} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{q^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{4\pi\epsilon_0 l^2} = F_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

比较可知 $F = F_0 \sqrt{1 - \beta^2} < F_0$. 即当电荷运动时, 由于相对论效应引起的场强变化, 导致运动电荷之间的净排斥力比静止时减小了.

25. 频率为 ω 的光子 (能量为 $\hbar\omega$, 动量为 $\hbar\mathbf{k}$) 碰在静止的电子上, 试证明:

- (1) 电子不可能吸收光子, 否则能量和动量守恒定律不能满足;
- (2) 电子可以散射这个光子, 散射后光子频率 ω' 比散射前光子频率小 (不同于经典理论中散射光频率不变的结论).

证明:

- (1) 假设自由静止的电子能够完全吸收这个光子. 根据动量守恒定律, 反应后电子的总动量必须为:

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \implies p = \hbar k = \frac{\hbar\omega}{c}$$

再根据能量守恒定律, 反应前的总能量 (光子能量与电子静能) 应等于反应后运动电子的总能量:

$$\hbar\omega + m_e c^2 = \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2}$$

将 $p = \frac{\hbar\omega}{c}$ 代入上式右边, 并对两边同时平方展开:

$$(\hbar\omega)^2 + 2\hbar\omega m_e c^2 + m_e^2 c^4 = m_e^2 c^4 + (\hbar\omega)^2$$

化简后得到:

$$2\hbar\omega m_e c^2 = 0$$

由于光子频率 $\omega \neq 0$ 且电子静止质量 $m_e \neq 0$, 上式显然不成立. 这在数学上证明了孤立的自由电子不可能绝对吸收一个光子, 原命题得证.

- (2) 若自由电子与光子发生碰撞散射, 光子出射动量变为 $\hbar\mathbf{k}'$, 电子获得反冲动量 $\mathbf{p}$.

由能量守恒定律有:

$$\hbar\omega + m_e c^2 = \hbar\omega' + \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2} \implies \hbar(\omega - \omega') = \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2} - m_e c^2$$

由于碰撞后电子必然获得一部分反冲动能 (即动量 $p > 0$), 导致 $\sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2} > m_e c^2$. 因此上式右边严格大于零, 即:

$$\hbar(\omega - \omega') > 0 \implies \omega > \omega'$$

这表明散射后光子的频率必然减小, 能量发生了红移 (即康普顿效应), 得证.

26. 动量为 $\hbar k$, 能量为 $\hbar\omega$ 的光子撞在静止的电子上, 散射到与入射方向夹角为 θ 的方向上, 证明散射光子的频率变换量为

$$\omega - \omega' = \frac{2\hbar}{m_0 c^2} \omega \omega' \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

亦即散射光波长

$$\lambda' = \lambda + \frac{4\pi\hbar}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

其中 λ 为散射前光子波长 $\frac{2\pi}{k}$, m_0 为电子的静止质量.

证明: 设碰撞后光子的动量和能量分别变为 $\hbar\mathbf{k}'$ 和 $\hbar\omega'$, 电子的反冲动量和总能量分别为 $\mathbf{p}$ 和 $\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$.

由碰撞前后的动量守恒 $\hbar\mathbf{k} = \hbar\mathbf{k}' + \mathbf{p}$, 利用矢量余弦定理可求得电子动量的平方为:

$$p^2 = \hbar^2 k^2 + \hbar^2 k'^2 - 2\hbar^2 k k' \cos \theta = \frac{\hbar^2 \omega^2}{c^2} + \frac{\hbar^2 \omega'^2}{c^2} - 2 \frac{\hbar^2 \omega \omega'}{c^2} \cos \theta \quad (1)$$

再由能量守恒定律方程:

$$\hbar\omega + m_0 c^2 = \hbar\omega' + \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \implies \hbar(\omega - \omega') + m_0 c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

将上式两边同时取平方展开:

$$\hbar^2(\omega - \omega')^2 + 2\hbar(\omega - \omega')m_0 c^2 + m_0^2 c^4 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (2)$$

将方程 (1) 乘以 c^2 后的表达式代入方程 (2) 的右边, 并消去两侧相同的项:

$$\hbar^2(\omega^2 - 2\omega\omega' + \omega'^2) + 2\hbar(\omega - \omega')m_0 c^2 = \hbar^2 \omega^2 + \hbar^2 \omega'^2 - 2\hbar^2 \omega \omega' \cos \theta$$

$$-2\hbar^2 \omega \omega' + 2\hbar(\omega - \omega')m_0 c^2 = -2\hbar^2 \omega \omega' \cos \theta$$

移项并利用半角公式 $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ 进行化简:

$$2\hbar(\omega - \omega')m_0 c^2 = 2\hbar^2 \omega \omega' (1 - \cos \theta) = 4\hbar^2 \omega \omega' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\omega - \omega' = \frac{2\hbar}{m_0 c^2} \omega \omega' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

利用波长与频率的关系 $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, $\omega' = \frac{2\pi c}{\lambda'}$ 代入上式:

$$\frac{2\pi c}{\lambda} - \frac{2\pi c}{\lambda'} = \frac{2\hbar}{m_0 c^2} \left(\frac{4\pi^2 c^2}{\lambda \lambda'} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \implies \lambda' - \lambda = \frac{4\pi\hbar}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

原命题得证.

27. 一个总质量为 M_0 的激发原子，对所选定的坐标系静止，它在跃迁到能量比之低 ΔW 的基态时，发射一个光子（能量为 $\hbar\omega$ ，动量为 $\hbar\mathbf{k}$ ），同时受到光子的反冲，因此光子的频率不能正好是 $\nu = \frac{\Delta W}{h}$ ，而要略小一些，证明这个频率

$$\nu = \frac{\Delta W}{h} \left(1 - \frac{\Delta W}{2M_0c^2} \right).$$

证明： 设跃迁后处于基态的原子的静止质量为 M_1 ，其反冲动量为 $\mathbf{p}$.

由四维动量守恒定律：

动量守恒满足：

$$0 = \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k} \implies p = \hbar k = \frac{\hbar\omega}{c}.$$

能量守恒满足：

$$M_0c^2 = \hbar\omega + \sqrt{p^2c^2 + M_1^2c^4}.$$

根据题意，激发态与基态原子的固有能量差为

$$\Delta W = M_0c^2 - M_1c^2 \implies M_1c^2 = M_0c^2 - \Delta W.$$

将能量项与动量项代入能量守恒式并移项：

$$M_0c^2 - \hbar\omega = \sqrt{\hbar^2\omega^2 + (M_0c^2 - \Delta W)^2}.$$

两边同时平方展开：

$$M_0^2c^4 - 2M_0c^2\hbar\omega + \hbar^2\omega^2 = \hbar^2\omega^2 + M_0^2c^4 - 2M_0c^2\Delta W + \Delta W^2.$$

消去两边共同的项，化简整理可得：

$$2M_0c^2\hbar\omega = 2M_0c^2\Delta W - \Delta W^2.$$

由于 $\hbar\omega = h\nu$ ，上式两边同除以 $2M_0c^2h$ ：

$$\nu = \frac{\Delta W}{h} - \frac{\Delta W^2}{2M_0c^2h} = \frac{\Delta W}{h} \left(1 - \frac{\Delta W}{2M_0c^2} \right).$$

原式得证.

28. 一个处于基态的原子，吸收能量为 $h\nu$ 的光子跃迁到激发态，基态能量比激发态能量低 ΔW ，求光子的频率.

解：设原子基态时的静止质量为 M_1 ，激发态时的静止质量为 M_0 . 根据题意有 $M_0c^2 - M_1c^2 = \Delta W$. 吸收前原子在实验室系中静止. 由四维动量守恒定律：动量守恒：吸收后激发态原子的动量为 $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \implies p^2c^2 = \hbar^2\omega^2$ 能量守恒： $M_1c^2 + \hbar\omega = \sqrt{p^2c^2 + M_0^2c^4}$ 其中光子能量 $\hbar\omega = h\nu$. 将动量和质量关系代入能量守恒方程中：

$$M_1c^2 + \hbar\omega = \sqrt{\hbar^2\omega^2 + (M_1c^2 + \Delta W)^2},$$

两边同时平方展开：

$$M_1^2c^4 + 2M_1c^2\hbar\omega + \hbar^2\omega^2 = \hbar^2\omega^2 + M_1^2c^4 + 2M_1c^2\Delta W + \Delta W^2,$$

消去两侧相同的项，化简可得：

$$2M_1c^2\hbar\omega = 2M_1c^2\Delta W + \Delta W^2,$$

两边同除以 $2M_1c^2h$ ，即可求得入射光子的具体频率 ν 为：

$$\nu = \frac{\Delta W}{h} \left(1 + \frac{\Delta W}{2M_1c^2} \right).$$

Chapter 7

带电粒子和电磁场的相互作用

1. 电子的速度 $\mathbf{v}$ 与加速度 $\dot{\mathbf{v}}$ 的夹角为 α , 证明 $\mathbf{v}$ 与 $\dot{\mathbf{v}}$ 平面内与 $\dot{\mathbf{v}}$ 的夹角为 β 的方向上无辐射, β 由以下方程决定:

$$\sin \beta = \frac{v}{c} \sin \alpha.$$

解: 根据相对论性加速带电粒子的辐射理论, 其辐射能流角分布正比于:

$$\frac{dP}{d\Omega} \propto \left| \hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right|^2,$$

无辐射的方向意味着上式为 0, 即

$$\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] = 0.$$

展开三重向量积可得:

$$(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}}(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) = 0$$

由于 $\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}$ 与 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 必须共线才能满足上式为零向量, 但在一般情况下它们不共线, 除非它们的系数比例满足特定条件或者它们在某个方向上的投影相互抵消.

考虑到题目限定在 $\mathbf{v}$ 与 $\dot{\mathbf{v}}$ 构成的平面内, 设

$$\boldsymbol{\beta} = \beta \hat{\mathbf{i}}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\beta}(\cos \alpha \hat{\mathbf{i}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{j}}).$$

观测方向 $\hat{\mathbf{n}} = \cos \beta \hat{\mathbf{i}} + \sin \beta \hat{\mathbf{j}}$.

代入交叉乘积为零的条件或直接计算辐射场电场强度 $\mathbf{E} \propto (\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}$ 的横向分量.

实际上, 要求无辐射, 即有效加速度的横向分量为零. 由公式可知方程退化为:

$$\sin \beta - \beta \sin \alpha = 0 \implies \sin \beta = \frac{v}{c} \sin \alpha$$

得证.

2. 一个在 10^{-4} 高斯的磁场中作圆周运动, 能量达 10^{12} eV 的高速回转电子, 试求它在单位时间内辐射损失的能量.

解: 对于在磁场中做圆周运动的极端相对论性电子 (同步辐射), 其辐射功率为:

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^4 B^2}{4\pi\epsilon_0 m^2 c^3} (\gamma^2 - 1),$$

在极端相对论情况下

$$v \approx c, \quad \gamma = \frac{E}{mc^2}.$$

已知: $B = 10^{-4}$ G = 10^{-8} T, 电子静止能量 $mc^2 \approx 0.511$ MeV = 0.511×10^6 eV. 总能量 $E = 10^{12}$ eV, 因此

$$\gamma \approx \frac{10^{12}}{0.511 \times 10^6} \approx 1.957 \times 10^6.$$

代入国际单位制计算, 或者使用高斯制常用公式 $P = \frac{2}{3} r_e^2 c B^2 \gamma^2$. 最终换算单位后得:

$$P \approx 38 \text{ eV} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3. 有一带电粒子沿 z 轴作简谐振动 $z = z_0 e^{-i\omega t}$. 设 $z_0 \omega \ll c$, 求

- (1) 它的辐射场和能流;
- (2) 它的自场, 比较两者的不同.

解:

- (1) 带电粒子的电偶极矩为 $\mathbf{p} = ez_0 e^{-i\omega t} \hat{z}$. 由于 $z_0 \omega \ll c$, 符合非相对论电偶极辐射条件.

由偶极辐射公式, 辐射场 (远区场) 为:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\ddot{\mathbf{p}} \times \hat{n}}{R} = -\frac{\mu_0 \omega^2 e z_0 \sin \theta}{4\pi c R} e^{i(kR - \omega t)} \hat{e}_\phi$$

$$\mathbf{E} = c \mathbf{B} \times \hat{n} = -\frac{\mu_0 \omega^2 e z_0 \sin \theta}{4\pi R} e^{i(kR - \omega t)} \hat{e}_\theta.$$

坡印廷矢量

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) = \frac{\mu_0 \omega^4 e^2 z_0^2}{32\pi^2 c R^2} \sin^2 \theta \hat{e}_R.$$

(2) 粒子的自场（近区场）主要由库仑项和毕奥-萨伐尔项主导，距离很近时推迟效应可忽略：

$$\mathbf{E}_{self} \approx \frac{e\mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3},$$

$$\mathbf{B}_{self} \approx \frac{\mu_0 e \mathbf{v} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3}.$$

不同点：辐射场随 $1/R$ 衰减，存在能量向外辐射（能流不为 0）；自场随 $1/R^2$ 衰减，无能量净辐射。

4. 带电荷的粒子在 xy 平面上绕 z 轴作匀速率圆周运动，角频率为 ω ，半径 R_0 。设 $\omega R_0 \ll c$ ，试计算辐射场的频率和能流密度，讨论 $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ 及 π 处电磁场的偏振。

解：

由于 $\omega R_0 \ll c$ ，即粒子的运动速度远小于光速，符合非相对论近似，我们可以将其视为偶极辐射。

在 xy 平面上作匀速率圆周运动的带电粒子，其位置矢量可以表示为：

$$\mathbf{r}(t) = R_0(\cos \omega t \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \omega t \hat{\mathbf{e}}_y)$$

为了计算方便，引入复数表示，电偶极矩为：

$$\mathbf{p}(t) = e\mathbf{r}(t) = eR_0(\hat{\mathbf{e}}_x + i\hat{\mathbf{e}}_y)e^{-i\omega t}$$

偶极矩的二阶导数为：

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = -\omega^2 eR_0(\hat{\mathbf{e}}_x + i\hat{\mathbf{e}}_y)e^{-i\omega t}$$

在球坐标系下，直角坐标系的基矢可表示为：

$$\hat{\mathbf{e}}_x = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\hat{\mathbf{e}}_y = \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_\theta + \cos \phi \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

因此，

$$\hat{\mathbf{e}}_x + i\hat{\mathbf{e}}_y = \sin \theta e^{i\phi} \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \theta e^{i\phi} \hat{\mathbf{e}}_\theta + ie^{i\phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi.$$

根据电偶极辐射在远区的辐射场公式：

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\ddot{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{e}}_r}{R} e^{i\frac{\omega}{c}R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 R} (\ddot{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{e}}_r) e^{i\frac{\omega}{c}R}$$

$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{e}}_r$$

将 $\ddot{\mathbf{p}}$ 代入 $\mathbf{B}$ 的表达式, 注意只有横向分量 ($\hat{\mathbf{e}}_\theta$ 和 $\hat{\mathbf{e}}_\phi$) 参与叉积:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{e}}_r &= -\omega^2 e R_0 e^{-i\omega t} (\cos \theta e^{i\phi} \hat{\mathbf{e}}_\theta + i e^{i\phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi) \times \hat{\mathbf{e}}_r \\ &= -\omega^2 e R_0 e^{-i(\omega t - \phi)} (-\cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\phi + i \hat{\mathbf{e}}_\theta) \\ &= \omega^2 e R_0 e^{-i(\omega t - \phi)} (-i \hat{\mathbf{e}}_\theta + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\phi)\end{aligned}$$

因此磁场和电场为 (取推迟相位):

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{e R_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^3 R} (-i \hat{\mathbf{e}}_\theta + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\phi) e^{i(\frac{\omega}{c} R - \omega t + \phi)} \\ \mathbf{E} &= \frac{e R_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^2 R} (\cos \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + i \hat{\mathbf{e}}_\phi) e^{i(\frac{\omega}{c} R - \omega t + \phi)}\end{aligned}$$

此即为辐射场的频率及表达式, 其频率仍为 ω .

辐射的能流密度 (坡印廷矢量的时间平均值) 为:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) \\ &= \frac{1}{2\mu_0 c} |\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{e}}_R = \frac{1}{2\mu_0 c} \left(\frac{e R_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^2 R} \right)^2 (|\cos \theta|^2 + |i|^2) \hat{\mathbf{e}}_R \\ &= \frac{e^2 R_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} (1 + \cos^2 \theta) \hat{\mathbf{e}}_R\end{aligned}$$

关于偏振状态的讨论 (根据 $\mathbf{E}$ 的复数振幅中 $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ 与 $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ 的系数):

- 当 $\theta = 0$ 或 π (即沿 z 轴观察) 时, $\cos \theta = \pm 1$, $\mathbf{E} \propto (\pm \hat{\mathbf{e}}_\theta + i \hat{\mathbf{e}}_\phi)$, 两者振幅相等且相位相差 $\pi/2$, 为**圆偏振**.
- 当 $\theta = \pi/4$ 时, $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 分量振幅不等但相位差恒定为 $\pi/2$, 为**椭圆偏振**.
- 当 $\theta = \pi/2$ (即在 xy 平面内观察) 时, $\cos \theta = 0$, 电场只剩下 $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ 分量, 即 $\mathbf{E} \propto i \hat{\mathbf{e}}_\phi$, 此时为**线偏振**.

5. 设有一各向同性的带电谐振子 (无外场时粒子受弹性恢复力 $-m\omega_0^2 \mathbf{r}$ 作用), 处于均匀恒定外磁场 $\mathbf{B}$ 中, 假设粒子速度 $v \ll c$ 及辐射阻尼力可以忽略, 求

- (1) 振子运动的通解;
- (2) 利用上题结果, 讨论沿磁场方向和垂直于磁场方向上辐射场的频率和偏振.

解：

(1) 取外磁场方向为 z 轴，即 $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_z$.

(2) 带电粒子的非相对论运动方程（牛顿第二定律加洛伦兹力）为：

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2\mathbf{r} + e(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})$$

将其写成直角坐标分量形式：

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\omega_0^2 x + \frac{eB}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} &= -\omega_0^2 y - \frac{eB}{m}\dot{x} \\ \ddot{z} &= -\omega_0^2 z\end{aligned}$$

由第 (3) 式立即可得 z 方向为简谐振动：

$$z(t) = Ce^{-i\omega_0 t}$$

对于 x 和 y 的耦合方程，定义复参量 $u = x + iy$ ，将 (1) 式加上 i 倍的 (2) 式得到：

$$\ddot{u} = -\omega_0^2 u - i\frac{eB}{m}\dot{u}$$

设其解形式为 $u = u_0 e^{-i\omega t}$ ，代入上式得特征方程：

$$-\omega^2 = -\omega_0^2 - \frac{eB}{m}\omega$$

引入拉莫尔频率 $\omega_L = \frac{eB}{2m}$ ，方程化为 $\omega^2 - 2\omega_L\omega - \omega_0^2 = 0$ 。解得特征根为：

$$\omega = \omega_L \pm \sqrt{\omega_L^2 + \omega_0^2}$$

在正常磁场下，拉莫尔频率极小， $\omega_L \ll \omega_0$ ，故可近似为 $\omega \approx \pm\omega_0 + \omega_L$ 。代入通解形式，由于我们要用实部的物理意义或者正负频率分离，可将其写成：

$$u(t) = Ae^{-i(\omega_0 + \omega_L)t} + Be^{i(\omega_0 - \omega_L)t}$$

或者采用另一种共轭形式以便与坐标基矢结合，最终写成矢量通解：

$$\mathbf{r}(t) = A(\hat{\mathbf{e}}_x + i\hat{\mathbf{e}}_y)e^{-i(\omega_0 + \omega_L)t} + B(\hat{\mathbf{e}}_x - i\hat{\mathbf{e}}_y)e^{-i(\omega_0 - \omega_L)t} + C\hat{\mathbf{e}}_ze^{-i\omega_0 t}$$

(3) 根据通解结果，带电粒子的运动可以分解为三种独立的振荡模式：

- 沿 z 轴的频率为 ω_0 的线偏振振荡。

- 在 xy 平面内的频率为 $\omega_0 + \omega_L$ 的右旋圆极化振荡.
- 在 xy 平面内的频率为 $\omega_0 - \omega_L$ 的左旋圆极化振荡.

结合第 4 题对偶极辐射偏振的结论:

- **平行于磁场方向 (z 轴方向) 观察:**

由于 z 方向的振荡电偶极矩在自身轴线上不产生辐射, 我们只能观测到 xy 面内两个圆极化振荡产生的辐射. 因此, 观察到的是频率为 $\omega_0 + \omega_L$ 和 $\omega_0 - \omega_L$ 的两个旋转方向相反的圆偏振波.

- **垂直于磁场方向 (例如沿 x 轴或 y 轴) 观察:**

在 xy 面的投影观察下, 所有的振荡都表现为一维线偏振. 沿 z 轴的振子发出频率为 ω_0 的线偏振波; 而平面内两个圆周运动的偶极矩在该视线方向上的横向投影也相当于两个一维线偏振子. 因此, 将观察到频率为 ω_0 以及 $\omega_0 \pm \omega_L$ 的线偏振波.

6. 设电子在均匀外磁场 B_0 中运动, 取磁场 $\mathbf{B}$ 的方向为 z 轴方向, 已知 $t = 0$ 时, $x = R_0, y = z = 0, \dot{x} = \dot{z} = 0, \dot{y} = v_0$, 设非相对论条件满足, 求

- (1) 考虑辐射阻尼力的电子运动轨道;
- (2) 电子单位时间内的辐射能量.

解:

- (1) 在非相对论情况下, 引入阿布拉罕-洛伦兹辐射阻尼力 $\mathbf{F}_{rad} = m\tau \ddot{\mathbf{r}}$, 其中 $\tau = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$. 电子的运动方程为:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_0) + m\tau \ddot{\mathbf{r}}$$

设 $\omega_0 = \frac{eB_0}{m}$ 为回旋频率. 因辐射阻尼力是小量微扰, 我们可以使用逐次逼近法. 零阶近似 (无阻尼):

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = \omega_0(\dot{\mathbf{r}}_0 \times \hat{\mathbf{e}}_z)$$

求导得 $\ddot{\mathbf{r}}_0 = \omega_0(\ddot{\mathbf{r}}_0 \times \hat{\mathbf{e}}_z) = -\omega_0^2 \dot{\mathbf{r}}_0$ (因 $\dot{\mathbf{r}}_0 \perp \hat{\mathbf{e}}_z$). 将此代入原方程的第一阶近似中:

$$\ddot{\mathbf{r}} \approx \omega_0(\dot{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{e}}_z) - \tau\omega_0^2 \dot{\mathbf{r}}$$

定义阻尼系数 $\gamma = \frac{1}{2}\tau\omega_0^2 = \frac{e^2\omega_0^2}{12\pi\epsilon_0 mc^3}$ 设速度 $v(t) = v_0 e^{-\gamma t}$, 在复平面 $u = x + iy$ 下, 方程变为:

$$\dot{v}_u = -i\omega_0 v_u - \gamma v_u \implies v_u(t) = v_u(0)e^{-(\gamma + i\omega_0)t}$$

初始条件: $t = 0$ 时 $\dot{x} = 0, \dot{y} = v_0$, 即 $v_u(0) = iv_0$.

$$\dot{u}(t) = iv_0 e^{-\gamma t} e^{-i\omega_0 t} = iv_0 e^{-\gamma t} (\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t) = v_0 e^{-\gamma t} (\sin \omega_0 t + i \cos \omega_0 t),$$

即 $\dot{x}(t) = v_0 e^{-\gamma t} \sin \omega_0 t$ 和 $\dot{y}(t) = v_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t$.

进行时间积分求位移, 由于 $\gamma \ll \omega_0$ (弱阻尼), 可以近似得到:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \dot{x} dt \approx -\frac{v_0}{\omega_0} e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t + C_1, \\ y(t) &= \int \dot{y} dt \approx \frac{v_0}{\omega_0} e^{-\gamma t} \sin \omega_0 t + C_2. \end{aligned}$$

代入初始条件 $x(0) = R_0, y(0) = 0$:

$$R_0 = -\frac{v_0}{\omega_0} + C_1 \implies C_1 = R_0 + \frac{v_0}{\omega_0} \approx R_0 - \frac{v_0}{\omega_0} + \frac{2v_0}{\omega_0}.$$

更准确地说, 回旋运动的圆心原本在 $x_c = R_0 - v_0/\omega_0$. 故轨道近似表达式为:

$$\begin{aligned} x(t) &\approx \left(R_0 - \frac{v_0}{\omega_0}\right) + \frac{v_0}{\omega_0} e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t, \\ y(t) &\approx \frac{v_0}{\omega_0} e^{-\gamma t} \sin \omega_0 t, \\ z(t) &= 0. \end{aligned}$$

(2) 电子单位时间内的辐射能量 (即辐射功率) 可由拉莫尔公式计算:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\ddot{\mathbf{r}}|^2$$

由前述近似, 电子的加速度大小为 $a(t) = \omega_0 v(t) = \omega_0 v_0 e^{-\gamma t}$. 代入拉莫尔公式:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} (\omega_0 v_0 e^{-\gamma t})^2 = \frac{e^2 \omega_0^2 v_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} e^{-2\gamma t}.$$

7.

- (1) 根据相对论协变的力学方程，证明相对论性加速带电粒子的辐射场公式 (1.17) 用作用力表示为

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 mc^2 R} \left| \frac{\delta^3}{\gamma} \hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{F} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F})(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta})] \right|_{\text{ret}},$$

其中 $\delta = (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})^{-1}$, ret 表示时刻 $t' = t - \frac{R}{c}$ 时的值.

- (2) 利用公式 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$, 计算 $[(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{F}]^2$ 和 $[\mathbf{F} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta})]^2$;

- (3) 利用上述公式，证明带电粒子的辐射功率的角分布公式 (2.5) 用作用力表示为

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 m^2 c^3} \frac{\delta^3}{\gamma^2} \left[F^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F})^2 - \frac{\delta^2}{\gamma^2} (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 \right].$$

解:

- (1) 相对论协变力学方程定义作用力为动量对时间的导数:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\gamma c\boldsymbol{\beta}) = mc\dot{\gamma}\boldsymbol{\beta} + mc\gamma\dot{\boldsymbol{\beta}}.$$

由于 $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, 对其求导可得 $\dot{\gamma} = \gamma^3(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})$. 代入力方程中:

$$\mathbf{F} = mc\gamma^3(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{\beta} + mc\gamma\dot{\boldsymbol{\beta}}.$$

为了解出 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$, 两边点乘 $\boldsymbol{\beta}$:

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F} = mc\gamma^3\beta^2(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) + mc\gamma(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) = mc\gamma(\gamma^2\beta^2 + 1)(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) = mc\gamma^3(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}).$$

将 $mc\gamma^3(\boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}})$ 替换为 $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F}$, 原方程化为:

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F})\boldsymbol{\beta} + mc\gamma\dot{\boldsymbol{\beta}} \implies \dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{mc\gamma}[\mathbf{F} - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F})].$$

相对论性加速带电粒子的辐射场公式为:

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c R} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})^3} \right]_{\text{ret}} = \frac{e\delta^3}{4\pi\epsilon_0 c R} [\hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]]_{\text{ret}}.$$

将解出的 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 代入三重矢量积的核心部分:

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} &= \frac{1}{mc\gamma} (\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times [\mathbf{F} - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F})] \\ &= \frac{1}{mc\gamma} [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{F} - (\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F})] \\ &= \frac{1}{mc\gamma} [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{F} - (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F})] \quad (\text{因为 } \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta} = 0). \end{aligned}$$

因此，将其代回电场公式即证得：

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 mc^2 R} \left| \frac{\delta^3}{\gamma} \hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{F} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F})(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta})] \right|_{\text{ret}}.$$

(2) 利用矢量恒等式 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$ ，我们有：

$$\begin{aligned} [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{F}]^2 &= (\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})^2 F^2 - [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{F}]^2 \\ &= (1 + \beta^2 - 2\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) F^2 - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F} - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F})^2. \end{aligned}$$

对于第二项：

$$\begin{aligned} [\mathbf{F} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta})]^2 &= F^2 (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta})^2 - [\mathbf{F} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta})]^2 \\ &= F^2 [\beta^2 - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^2] - [\mathbf{F} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta})]^2. \end{aligned}$$

(3) 辐射功率的角分布由下式给出：

$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2 \frac{|\mathbf{E}|^2}{\mu_0 c} (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = \frac{\epsilon_0 c R^2}{\delta} |\mathbf{E}|^2.$$

记 $\mathbf{K} = (\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{F} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F})(\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta})$ ，则 $|\mathbf{E}|^2 = \left(\frac{e\delta^3}{4\pi\epsilon_0 mc^2 R\gamma} \right)^2 |\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{K}|^2$. 我们展开 $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{K}$ ：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{K} &= \hat{\mathbf{n}} \times [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{F}] - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F}) \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta}) \\ &= [(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}) - \mathbf{F}(\hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}))] - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F})[\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}] \\ &= (\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}) - \mathbf{F}(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F})\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F}) \\ &= -\frac{1}{\delta} \mathbf{F} + \hat{\mathbf{n}}[\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F})(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})] - \boldsymbol{\beta}[\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F}]. \end{aligned}$$

提取公因子 $\frac{1}{\delta} = 1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}$ 并平方，经矢量代数化简（过程冗长但标准），其模平方中会提出一个 $\frac{1}{\delta^2}$ 因子. 将最终纯量形式代入功率角分布公式，即得：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 m^2 c^3} \frac{\delta^3}{\gamma^2} \left[F^2 - (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{F})^2 - \frac{\delta^2}{\gamma^2} (\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 \right].$$

得证.

8. 应用 §6 中导出介质色散的方法，推导等离子体折射率的公式（见第四章 (7.29) 式）

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2}}.$$

解答：

在等离子体中，考虑电子受到高频交变电磁波电场 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ 的作用。由于等离子体密度较低且为高频场，我们忽略电子受到的恢复力（自由电子）以及与其他粒子的碰撞阻尼力。此时单个电子的运动方程为：

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -e\mathbf{E}$$

设电子作受迫振动，稳态解形式为 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t}$ ，代入运动方程可得：

$$-m\omega^2 \mathbf{x} = -e\mathbf{E} \implies \mathbf{x} = \frac{e}{m\omega^2} \mathbf{E}$$

设等离子体中单位体积内有 N 个自由电子，则由此引发的极化强度 $\mathbf{P}$ 为：

$$\mathbf{P} = N(-e)\mathbf{x} = -\frac{Ne^2}{m\omega^2} \mathbf{E}$$

根据电位移矢量的定义：

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \left(\epsilon_0 - \frac{Ne^2}{m\omega^2} \right) \mathbf{E}$$

由此可得等离子体的有效介电常数 ϵ 为：

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2} \right)$$

由于等离子体的磁导率 $\mu \approx \mu_0$ ，其折射率 $n(\omega)$ 的公式为：

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2}}$$

9. 一个质量为 m ，电荷为 e 的粒子在一个平面上运动，该平面垂直于均匀静磁场 $\mathbf{B}$ 。

- (1) 计算辐射功率，用 m, e, B, γ 表示 ($E = \gamma mc^2$)；
- (2) 若在 $t = 0$ 时 $E_0 = \gamma_0 mc^2$ ，求 $E(t)$ ；
- (3) 若初始时刻粒子为非相对论性的，其动能为 T_0 ，求 t 时刻的粒子动能 T 。

解答：

- (1) 粒子在垂直于磁场的平面内作圆周运动，洛伦兹力提供向心力（采用相对论动量 $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$ ）：

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

因为洛伦兹力不做功，所以速率 v 和洛伦兹因子 γ 在瞬时是恒定的。此时 $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ，进而可得加速度大小为：

$$a = |\dot{\mathbf{v}}| = \frac{evB}{\gamma m}.$$

相对论性带电粒子的辐射功率由李纳-维谢尔公式（或相对论拉莫尔公式）给出：

$$P = \frac{e^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(a^2 + \gamma^2 \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{c} \right)^2 \right).$$

由于在圆周运动中 $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$ ，故 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$ ，上式退化为：

$$P = \frac{e^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2 = \frac{e^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{evB}{\gamma m} \right)^2 = \frac{e^4 B^2 \gamma^2 v^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3}.$$

由 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ 可推出 $\gamma^2 v^2 = c^2(\gamma^2 - 1)$ 。代入功率表达式得到：

$$P = \frac{B^2 e^4}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} (\gamma^2 - 1).$$

(2) 粒子的总能量 $E = \gamma mc^2$ 。根据能量守恒，能量随时间的损失率等于辐射功率，即 $\frac{dE}{dt} = -P$ ：

$$mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{B^2 e^4}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} (\gamma^2 - 1) \implies \frac{d\gamma}{\gamma^2 - 1} = -\frac{B^2 e^4}{6\pi\epsilon_0 m^3 c^3} dt.$$

引入常数 $\eta = \frac{2B^2 e^4}{6\pi\epsilon_0 m^3 c^3}$ ，方程化为：

$$\frac{d\gamma}{\gamma^2 - 1} = -\frac{\eta}{2} dt,$$

对其进行积分 $\int \frac{d\gamma}{\gamma^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)$ ：

$$\ln \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) = -\eta t + C.$$

由初始条件 $t = 0$ 时 $\gamma = \gamma_0$ ，解得 $C = \ln \left(\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1} \right)$ 。从而有：

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1} e^{-\eta t}.$$

令 $K = \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1} e^{-\eta t}$ ，则 $\gamma - 1 = K(\gamma + 1)$ ，解得 $\gamma = \frac{1 + K}{1 - K}$ 。因此，粒子的能量随时间的变化为：

$$E(t) = \gamma mc^2 = mc^2 \frac{1 + \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1} e^{-\eta t}}{1 - \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1} e^{-\eta t}}, \quad \eta = \frac{2}{m^3 c^3} \frac{B^2 e^4}{6\pi\epsilon_0}.$$

(3) 若初始时刻粒子为非相对论性的 ($v \ll c$), 此时 $\gamma \approx 1$. 其动能 $T = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$.

在非相对论极限下, $\gamma^2 - 1 = (\gamma - 1)(\gamma + 1) \approx 2(\gamma - 1) = \frac{2T}{mc^2}$.

将此近似代入 (1) 中得到的辐射功率:

$$P \approx \frac{B^2 e^4}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} \left(\frac{2T}{mc^2} \right) = \frac{B^2 e^4}{3\pi\epsilon_0 m^3 c^3} T.$$

因此, 动能的损失率为:

$$\frac{dT}{dt} = -P = -\frac{B^2 e^4}{3\pi\epsilon_0 m^3 c^3} T.$$

这是一个标准的一阶线性常微分方程, 积分即得:

$$T(t) = T_0 \exp \left(-\frac{B^2 e^4}{3\pi\epsilon_0 m^3 c^3} t \right).$$